ЗАДАЧИ К КУРСУ «ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

МОСКОВСКИЙ НЕЗАВИСИМЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
октябрь – декабрь 1998 г.

А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик

Комплексы и спектральные последовательности

Задача 1. Пусть V — векторное пространство и $W \subset V$ — его подпространство. Покажите, что существует единственный автоморфизм d биградуированной алгебры $S^*(V) \otimes \Lambda^*(W)$[1], удовлетворяющий условиям

1) $d(S^p(V) \otimes \Lambda^q(W)) \subset S^{p+1}(V) \otimes \Lambda^{q-1}(W)$;
2) $d^2 = 0$;
3) $d(u_1 u_2) = d(u_1)u_2 + (-1)^q u_1 d(u_2)$,
   где $u_1 \in S^*(V) \otimes \Lambda^q(W)$ и $u_2 \in S^*(V) \otimes \Lambda^*(W)$;
4) $d(1 \otimes w) = w \otimes 1$ для $w \in W$.

Таким образом, пространство $S^*(V) \otimes \Lambda^*(W)$, наделённое градуировкой, получаемой из градуировки пространства $\Lambda^*(W)$, и дифференциалом d, является комплексом.

Вычислите гомологии этого комплекса.

Вычислите гомологии комплекса

$$\dots \longleftarrow \mathrm{Der}_{k-1}(V) \longleftarrow \mathrm{Der}_k(V) \longleftarrow \dots,$$

где $\mathrm{Der}_k(V)$ — множество градуированных дифференцирований степени k алгебры $S^*(V) \otimes \Lambda^*(W)$, т. е. отображений удовлетворяющих правилу Лейбница

$$\Delta(u_1 u_2) = \Delta(u_1)u_2 + (-1)^{kq} u_1 \Delta(u_2),$$

$u_1 \in S^*(V) \otimes \Lambda^q(W)$, $u_2 \in S^*(V) \otimes \Lambda^*(W)$ и $\Delta(S^*(V) \otimes \Lambda^i(W)) \subset S^*(V) \otimes \Lambda^{i+k}(W)$, а дифференциал имеет вид $[d, \cdot]\colon \Delta \mapsto [d, \Delta] = d\Delta - (-1)^k \Delta d$ для $\Delta \in \mathrm{Der}_k(V)$.

Задача 2. Пусть M — гладкое многообразие. Вычислите когомологии комплекса

$$\dots \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{Diff}^{k-1}(M) \xrightarrow{[d,\cdot]} \mathcal{G}\mathrm{Diff}^k(M) \longrightarrow \dots,$$

где $\mathcal{G}\mathrm{Diff}^k(M)$ — множество градуированных дифференциальных операторов $\Delta\colon \Lambda^*(M) \to \Lambda^*(M)$ степени k (т. е. $\Delta(\Lambda^i(M)) \subset \Lambda^{i+k}(M)$) на внешней алгебре дифференциальных форм $\Lambda^*(M)$, а дифференциал действует по правилу

$$\mathcal{G}\mathrm{Diff}^k(M) \ni \Delta \mapsto [d, \Delta] \in \mathcal{G}\mathrm{Diff}^{k+1}(M),$$

[1] $S^*(V)$ и $\Lambda^*(V)$ — симметрическая и внешняя алгебры над V.

$[d, \Delta] = d\Delta - (-1)^k \Delta d$. Напомним, что отображение $\Delta\colon \Lambda^*(M) \to \Lambda^*(M)$ называется градуированным дифференциальным оператором, если существует такое число r, что для любых форм $\omega_i \in \Lambda^*(M)$, $i = 1, \dots, r+1$, выполняется равенство

$$[\omega_1, [\omega_2, \dots, [\omega_{r+1}, \Delta] \dots]] = 0,$$

причём для $\omega \in \Lambda^l(M)$ и $\nabla \in \mathcal{G}\mathrm{Diff}^k(M)$ их коммутатор $[\omega, \nabla] \in \mathcal{G}\mathrm{Diff}^{k+l}(M)$ определяется равенством

$$[\omega, \nabla](\eta) = \omega \wedge \nabla(\eta) - (-1)^{kl} \nabla(\omega \wedge \eta), \qquad \eta \in \Lambda^*(M).$$

Задача 3 (Гомологическая теория возмущений). Рассмотрим биградуированную алгебру

$$A = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} A_{p,q}, \qquad A_{p,q} \cdot A_{p',q'} \subset A_{p+p',q+q'},$$

для которой $A_{p,q} = 0$ если $p < 0$. Пусть δ и d — два таких градуированных дифференцирования алгебры A, что

1) $\delta(A_{p,q}) \subset A_{p-1,q}$;
2) $d(A_{p,q}) \subset A_{p,q-1}$;
3) для всякого q комплекс

$$0 \longleftarrow A_{0,q} \xleftarrow{\delta} A_{1,q} \xleftarrow{\delta} A_{2,q} \xleftarrow{\delta} A_{3,q} \xleftarrow{\delta} \dots$$

является резольвентой, т. е. точен в положительных размерностях;

4) $\delta^2 = 0$;
5) $\delta d + d\delta = 0$;
6) существует такое градуированное дифференцирование d' алгебры A, что

$$d^2 = [\delta, d'] \ (= \delta d' + d'\delta).$$

Это означает, в частности, что d индуцирует дифференциал на гомологиях относительно δ:

$$d\colon H_0(A_{\bullet,q}; \delta) \longrightarrow H_0(A_{\bullet,q-1}; \delta), \qquad \left(d|_{H_0(A_{\bullet,q};\delta)}\right)^2 = 0.$$

Докажите, что на пространстве A, наделённом тотальной градуировкой $A_i = \bigoplus_{p+q=i} A_{p,q}$, существует такой дифференциал

$$s\colon A_i \to A_{i-1}, \quad s^2 = 0, \quad s = \delta + d + s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)} + \dots,$$

где $s^{(r)}(A_{p,q}) \subset A_{p+r,q-r-1}$, что

$$H_i(A; s) = H_i(H_0(A; \delta); d).$$

Задача 4. Рассмотрим произвольный комплекс

$$\dots \longrightarrow K^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} K^i \xrightarrow{d^i} K^{i+1} \longrightarrow \dots$$

Вычислите спектральные последовательности, ассоциированные со следующими фильтрациями $\dots \subset K^\bullet_{p+1} \subset K^\bullet_p \subset \dots \subset K^\bullet$ комплекса $K^\bullet$:

а) $K^i_p = \begin{cases} K^i & \text{при } i < -p, \\ \ker d^i & \text{при } i = -p, \\ 0 & \text{при } i > -p, \end{cases}$ (каноническая фильтрация);

б) $K^i_p = \begin{cases} 0 & \text{при } i < p, \\ K^i & \text{при } i \geqslant p, \end{cases}$ («глупая» фильтрация);

в) $K^i_p = \begin{cases} 0 & \text{при } i < p, \\ \operatorname{im} d^{i-1} & \text{при } i = p, \\ K^i & \text{при } i > p. \end{cases}$

Скобки Схоутена

Задача 5. Пусть A — коммутативная $\Bbbk$-алгебра и P — A-модуль. Индуктивное определение внешнего умножения $\wedge\colon \mathrm{D}_*(A) \otimes_A \mathrm{D}_*(P) \to \mathrm{D}_*(P)$ таково:

$$a \wedge p = ap,$$
$$(X \wedge Y)(a) = X \wedge Y(a) + (-1)^{|Y|} X(a) \wedge Y,$$

где $a \in A$, $p \in P$, $X \in \mathrm{D}_*(A)$, $Y \in \mathrm{D}_*(P)$.

1) Докажите корректность этого определения (т. е. покажите, что $X \wedge Y$ лежит в $\mathrm{D}_*(P)$).
2) Сформулируйте и докажите основные свойства внешнего умножения.
3) Как нужно определить внешнее умножение полидифференцирований в категории $\mathbb{Z}_n$-градуированных модулей над $\mathbb{Z}_n$-градуированной алгеброй (ср. с задачей 7)?

Задача 6. Пусть A — коммутативная $\Bbbk$-алгебра. Индуктивное определение скобки Схоутена $[\![\cdot\,,\cdot]\!]\colon \mathrm{D}_*(A) \otimes_\Bbbk \mathrm{D}_*(A) \to \mathrm{D}_*(A)$ таково:

$$[\![a, b]\!] = 0,$$
$$[\![X, a]\!] = X(a),$$
$$[\![a, X]\!] = -X(a),$$
$$[\![Y, Z]\!](a) = [\![Y, Z(a)]\!] - (-1)^{|Z|}[\![Y(a), Z]\!],$$

где $a, b \in A$, $X \in \mathrm{D}_1(A)$, $Y, Z \in \mathrm{D}_*(A)$.

1) Докажите корректность этого определения (т. е. покажите, что $[\![Y, Z]\!]$ лежит в $\mathrm{D}_*(A)$).
2) Сформулируйте и докажите основные свойства скобки Схоутена.

Задача 7. Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра. Это означает, что $\mathcal{A} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_i \cdot \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$ и $ab = (-1)^{ij} ba$, если $a \in \mathcal{A}_i$ и $b \in \mathcal{A}_j$. Над такими алгебрами дифференциальное исчисление строится почти буквально так же, как и над коммутативными. В частности, можно определить понятие *градуированной скобки Схоутена* и *градуированной пуассоновой структуры*. Сделайте это и опишите свойства.

Задача 8. Хотелось бы обобщить скобку Схоутена таким образом, чтобы иметь операцию $[\![\cdot\,,\cdot]\!]\colon \mathrm{D}_*(A)\otimes_{\Bbbk}\mathrm{D}_*(P)\to\mathrm{D}_*(P)$ (ср. с задачей 5). Однако для произвольного A-модуля P определение, аналогичное данному в задаче 6, не работает. Какими дополнительными структурами следует снабдить модуль, чтобы получить нужное определение? Опишите категорию этих модулей.

Задача 9. Для любой коммутативной алгебры A соответствующая алгебра полидифференцирований $\mathrm{D}_*(A)=\bigoplus_{i\geqslant 0}\mathrm{D}_i(A)$ является коммутативной $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй (см. задачу 7) относительно внешнего умножения полидифференцирований.

1) Покажите, что скобка Схоутена над A является градуированной пуассоновой структурой в $\mathrm{D}_*(A)$.
2) Значит, этой структуре соответствует (супер)пуассонов комплекс. Что можно сказать о его когомологиях?

Задача 10 (Схема Магри)**.** Пусть A — коммутативная алгебра и P и Q — коммутирующие пуассоновы структуры над A, т. е.

$$[\![P,P]\!]=[\![P,Q]\!]=[\![Q,Q]\!]=0.$$

Пусть $a_1,a_2\in A$ — такие элементы, что $P(a_1)=Q(a_2)$.

1) Покажите, что если пуассонов комплекс алгебры A относительно структуры Q 1-ацикличен, т. е. $H^1(A;\partial_Q)=0$, то существуют такие элементы $a_3,a_4,\ldots\in A$, что $P(a_i)=Q(a_{i+1})$.
2) Докажите, что эти элементы находятся в инволюции относительно обеих структур, т. е. $\{a_i,a_j\}_P=\{a_i,a_j\}_Q=0$ для всех $i,j\geqslant 1$.

Задача 11. Пусть (A,P) — пуассонова алгебра.

1) Покажите, что скобка Схоутена $[\![\cdot\,,\cdot]\!]$ над A индуцирует некоторую скобку $[\![\cdot\,,\cdot]\!]_P$ в группах когомологий $H^*(A;\partial_P)$.
2) Докажите, что если P — невырожденная структура, то скобка $[\![\cdot\,,\cdot]\!]_P$ тривиальна.

Задача 12. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над полем нулевой характеристики и $S_{\mathfrak{g}}$ — пуассонова алгебра левоинвариантных символов (т. е. градуированная алгебра, присоединённая к универсальной обёртывающей $U_{\mathfrak{g}}$). Докажите, что первая группа пуассоновых когомологий алгебры $S_{\mathfrak{g}}$ тривиальна.

Задача 13. *Пуассоновым центром* пуассоновой алгебры (A,P) называют множество

$$Z(A,P)=\{\,a\in A\mid \{a,b\}_P=0\quad\forall\, b\in A\,\}.$$

Очевидно, что $Z(A,P)$ — подалгебра в A и $Z(A,P)=H^0(A;\partial_P)$. Опишите пуассонов центр алгебры $S_{\mathfrak{g}}$ (см. задачу 12).

Задача 14. Пусть (A,P) — пуассонова алгебра. Идеал $\mathfrak{p}$ алгебры A называется *пуассоновым*, если он устойчив относительно скобки $\{\cdot\,,\cdot\}_P$: $\{A,\mathfrak{p}\}_P\subset\mathfrak{p}$. Пусть $I\subset A$ — простой идеал алгебры A. Обозначим через $\mathfrak{m}_P(I)$ максимальный пуассонов идеал, лежащий в I (т. е. максимальный в классе пуассоновых, содержащихся в I).

1) Докажите, что $\mathfrak{m}_P(I)$ — простой идеал.
2) Факторалгебра $A/\mathfrak{m}_P(I)$ несёт естественную структуру пуассоновой алгебры. Докажите, что её пуассонов центр — поле.

Задача 15. Исследуйте связь между максимальными пуассоновыми идеалами алгебры $S_{\mathfrak{g}}$ (см. задачу 12) и орбитами коприсоединённого действия $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}^*$.

Задача 16. Внешнюю алгебру поливекторных полей на гладком многообразии M можно понимать как алгебру функций на кокасательном многообразии $T^*(M)$, рассматриваемом как супермногообразие размерности $n|n$, где $n = \dim M$. Это многообразие обладает нечётной симплектической структурой, причём роль скобки Пуассона играет скобка Схоутена. Докажите, что в этой ситуации, как и в стандартной, каждое каноническое преобразование обладает производящей функцией.

Задача 17. Пусть M — гладкое многообразие, $\pi\colon E \to M$ — гладкое векторное расслоение, $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — дифференциальное уравнение порядка k и $\mathcal{E}^\infty \subset J^\infty(\pi)$ — его бесконечное продолжение. Опишите пуассоновы структуры $P \in \mathrm{D}_2(\mathcal{E}^\infty)$, для которых гамильтоновы векторные поля $P(f) \in \mathrm{D}_1(\mathcal{E}^\infty)$ являются симметриями распределения Картана при любом $f \in \mathcal{F}(E)$.

Скобки Нийенхейса

Задача 18. Для произвольной коммутативной алгебры A с единицей, в которой можно сокращать на 2 (т. е. такой, что $2a = 0 \implies a = 0$), докажите существование и единственность скобки Нийенхейса $[\![\mathrm{D}_1(\Lambda^i(A)), \mathrm{D}_1(\Lambda^j(A))]\!] \subset \mathrm{D}_1(\Lambda^{i+j}(A))$.

Задача 19. Сформулируйте и докажите основные свойства скобки Нийенхейса.

Задача 20. Аналогично задаче 7, определите суперскобку Нийенхейса и опишите её свойства.

Задача 21. Пусть A и B — коммутативные алгебры с единицей, $\varphi\colon A \to B$ их гомоморфизм и $\nabla\colon \mathrm{D}_1(A, B) \to \mathrm{D}_1(B)$ — связность. Докажите тождество $[\![U_\nabla, U_\nabla]\!](X, Y) = 2R_\nabla(X_A, Y_A)$, где U_∇ — форма связности, R_∇ — кривизна, $X, Y \in \mathrm{D}_1(B)$ и $Z_A = Z \circ \varphi$ для любого $Z \in \mathrm{D}_1(B)$.

Задача 22. Пусть A, B, φ — те же, что и в задаче 21, и связность ∇ плоская (т. е. $R_\nabla = 0$). Пусть $L_\nabla = L_{U_\nabla}$ и $d_h = d - L_\nabla$ — вертикальный и горизонтальный дифференциалы в $\Lambda^*(B)$. Докажите, что $\Lambda^1(B) = \Lambda^1_h(B) \oplus \nabla\Lambda^1(B)$, где $\Lambda^1_h(B)$ и $\nabla\Lambda^1(B)$ — подмодули в $\Lambda^1(B)$, порожденные образами d_h и L_∇ соответственно.

Задача 23. Пусть алгебры A, B, гомоморфизм φ и связность ∇ удовлетворяют условиям задачи 22 и $d_h\colon \Lambda^*(B) \to \Lambda^*(B)$ — соответствующий горизонтальный дифференциал. Рассмотрим $\mathbb{Z}$-градуированную алгебру Ли $\mathrm{D}(\Lambda^*(B))$ градуированных дифференцирований градуированной алгебры $\Lambda^*(B)$ (она состоит из таких $\Bbbk$-линейных градуированных отображений $X\colon \Lambda^*(B) \to \Lambda^*(B)$, что $X(\omega \wedge \theta) = X(\omega) \wedge \theta + (-1)^{|X|\cdot|\omega|}\omega \wedge X(\theta)$, $\omega, \theta \in \Lambda^*(B)$). Тогда d_h порождает отображение $\partial_h\colon \mathrm{D}(\Lambda^*(B)) \to \mathrm{D}(\Lambda^*(B))$, действующее по формуле $\partial_h(X) = [d_h, X]$.

1) Докажите, что ∂_h — дифференциал.
2) Опишите когомологии $H(\partial_h)$.
3) Каков будет ответ, если вместо ∂_h взять дифференциал де Рама

$$d\colon \Lambda^*(B) \to \Lambda^*(B)?$$

Задача 24 (Объединяющая конструкция Виноградова). Напомним, что скобка Нийенхейса была определена нами в модулях $\mathrm{D}_1(\Lambda^*(A))$. С другой стороны, скобка Схоутена «живёт» в $\mathrm{D}_*(A)$. Естественное желание — построить объединённую скобку в $\mathrm{D}_*(\Lambda^*(A))$ таким образом образом, чтобы её ограничение на $\mathrm{D}_*(\Lambda^0(A)) = \mathrm{D}_*(A)$ совпадало со скобкой Схоутена, а на $\mathrm{D}_1(\Lambda^*(A))$ — со скобкой Нийенхейса. Попробуйте сделать это.

Машина, производящая скобки

Пусть $\mathcal{P}$ — градуированный дифференциальный $\mathcal{A}$-модуль ($\mathcal{A}$ — градуированная алгебра), т. е. $\mathcal{P} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{P}_i$ и $d_{\mathcal{P}}\colon \mathcal{P}_i \to \mathcal{P}_{i+1}$ — дифференциал. Пусть градуированный модуль $\mathcal{M}$ представлен градуированными эндоморфизмами $\mathrm{End}^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P})$, т. е. задан градуированный гомоморфизм $\mathrm{i}\colon \mathcal{M} \to \mathrm{End}^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P})$. Тогда можно определить производные Ли элементов из $\mathcal{P}$ вдоль элементов из $\mathcal{M}$: $L_m = d_{\mathcal{P}} \circ \mathrm{i}_m - (-1)^{|\mathrm{i}_m|}\, \mathrm{i}_m \circ d_{\mathcal{P}}$. Если повезёт, градуированный коммутатор $[L_m, L_n]$ будет вновь иметь вид L_o для некоторого элемента $o \in \mathcal{M}$ и, если o определён однозначно, равенство $o = [\![m, n]\!]$ определит скобку на модуле $\mathcal{M}$. Именно так вводились скобки Схоутена и Нийенхейса. В обоих случаях модулем $\mathcal{P}$ служил $\Lambda^*(A)$ с дифференциалом де Рама, а в качестве i выступали подстановка полидифференцирований (для Схоутена) и подстановка Λ^*-значных дифференцирований (для Нийенхейса) в дифференциальные формы.

Задача 25. Пусть (A, P) — пуассонова алгебра. Возьмём в качестве $\mathcal{P}$ дифференциальный модуль $(\mathrm{D}_*(A), \partial_P)$, а в качестве представления i — подстановку дифференциальных форм в полидифференцирования. Описать скобку, возникающую в $\Lambda^*(A)$.

Задача 26. Пусть A — коммутативная алгебра и $U \in \Lambda^*(A) \otimes \mathrm{D}_1(A)$ — интегрируемый элемент (т. е. $[\![U, U]\!] = 0$, где $[\![\cdot\,,\cdot]\!]$ — скобка Нийенхейса). Возьмём в качестве $\mathcal{P}$ дифференциальный модуль $(\Lambda^*(A) \otimes \mathrm{D}_1(A), \partial_U)$, а в качестве представления i — подстановку элементов из $\Lambda^*(A) \otimes \mathrm{D}_1(A)$ в такие же элементы. Описать скобку, возникающую в $\Lambda^*(A) \otimes \mathrm{D}_1(A)$.

Задача 27. Пусть модуль $\mathcal{P}$ — такой же, как в задаче 26, а в качестве представления i выбрана подстановка полидифференцирований в элементы $\Lambda^*(A) \otimes \mathrm{D}_1(A)$. Описать скобку, возникающую в $\mathrm{D}_*(A)$.

Скобки, порождаемые операторами второго порядка

Задача 28. Пусть (M, θ) — пуассоново многообразие и $\Delta_\theta\colon \Lambda^*(M) \to \Lambda^*(M)$ — пуассонов гомологический оператор

$$\Delta_\theta = [\mathrm{i}_\theta, d] \; (= \mathrm{i}_\theta\, d - d\, \mathrm{i}_\theta).$$

Он является градуированным оператором второго порядка, так что его символ задаёт некоторую скобку на $\Lambda^*(M)$:

$$\{\omega_1, \omega_2\} = [\omega_1, [\omega_2, \Delta_\theta]].$$

Опишите свойства этой скобки. Вычислите $\{f, g\}$, $\{df, g\}$, $\{df, dg\}$, где $f, g \in C^\infty(M)$.

Задача 29. Пусть M — ориентируемое многообразие. Каждая форма объёма на нём задаёт изоморфизм между дифференциальными формами $\Lambda^*(M)$ и поливекторными полями $\mathrm{D}_*(M)$. Покажите, что оператор де Рама переходит при этом в некоторый оператор второго порядка на внешней алгебре $\mathrm{D}_*(M)$, символ которого не зависит от выбора формы объёма. Вычислите этот символ.

Задача 30. Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие и $\partial_\omega\colon \mathrm{D}_*(M) \to \mathrm{D}_*(M)$ — соответствующий пуассонов дифференциал. Вычислите символ оператора

$$\Delta = [\mathrm{i}_\omega, \partial_\omega]\colon \mathrm{D}_*(M) \to \mathrm{D}_*(M).$$