Математический Колледж НМУ **Анализ, 3 семестр**

Экзамен 7–14 декабря 1998 г.

Пожалуйста, соблюдайте следующие правила оформления работы:

1. *Работа должна иметь титульный лист, на котором написана фамилия и имя сдающего экзамен* **И БОЛЕЕ НИЧЕГО НЕ НАПИСАНО**
2. *Решение каждой задачи или пункта, в котором требуется ответ, должно начинаться со слова "Ответ", за которым следует ответ. Это правило нужно соблюдать, даже если в тексте решения ответ и так встречается.*

Работы нужно сдать в учебную часть или непосредственно Ю. М. Бурману (243-0681, burman@mccme.ru) до 20.00 в понедельник, 14 декабря.

Задача 1. Кососимметрическая функция $F(a, b, c)$, где $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, равна ориентированной площади проекции треугольника с вершинами в точках a, b, c на плоскость xy, умноженной на $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2$. a) Запишите 2-форму, представляемую функцией F, в координатах. b) Вычислите интеграл от ограничения этой формы по поверхности, заданной уравнением $x^2 + y^2 + 2(z-1)^2 = 1$.

Задача 2. Приведите пример замкнутой, но не точной 1-формы в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Задача 3. Докажите, что в $\mathbb{R}^3$ не существует двумерной поверхности (даже некомпактной), в каждой своей точке касающейся векторных полей $L_1 = -z\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ и $L_2 = -xy\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}$.

Задача 4. Опишите линейное пространство, состоящее из всех векторных полей на $\mathbb{R}^2$, действующих нулем на симметрический 2-тензор (сечение симметрического квадрата кокасательного расслоения) $(dx)^2 + (dy)^2$. Задайте в этом пространстве произвольный базис и вычислите попарные коммутаторы базисных элементов.

Задача 5. a) Докажите, что на плоскости Лобачевского существует 2-форма ω, для которой выполнено условие $F^*\omega = \omega$, где F — произвольное аффинное преобразование. b) Докажите, что любые две таких формы пропорциональны. c) Выпишите формулу для таких форм в координатах в модели верхней полуплоскости. d) Выпишите явно форму $U^*\omega$, где U — отображение единичного круга на верхнюю полуплоскость, действующее по формуле $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ (т.е., стандартная эквивалентность моделей в круге и в полуплоскости). e) Найдите интеграл от формы $\nu = \frac{dx}{y}$ (в модели верхней полуплоскости) по границе треугольника, вершины которого лежат на абсолюте в точках с координатами $(-1, 0), (0, 0), (1, 0)$.

Задача 6. Пусть γ — гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$, а $M_r \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \gamma : |x - y| \le r\}$ — множество точек, удаленных от γ на расстояние, не превышающее r. a) Докажите, что при $n = 2$ и достаточно малом r площадь множества M_r равна $2r\ell(\gamma)$, где $\ell(\gamma)$ — длина кривой γ. b) Докажите, что при произвольном n объем (n-мерный) множества M_r при достаточно малых r равен $v_{n-1}r^{n-1}\ell(\gamma)$, где v_k — объем k-мерного единичного шара. c) Найдите v_k. d) Пусть γ — ориентируемая компактная поверхность без края в $\mathbb{R}^3$. Докажите, что объем множества M_r при достаточно малых r равен $2rS(\gamma) + \frac{4\pi}{3}r^3\chi(\gamma)$, где $S(\gamma)$ — площадь, а $\chi(\gamma)$ — эйлерова характеристика поверхности γ.