Клеточные пространства

Клеточное пространство это хаусдорфово топологическое пространство X, разбитое в объединение непересекающихся множеств (клеток) $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigsqcup_{\alpha \in I_k} e_\alpha^k$ таких, что:

(C) для каждой клетки e_α^k существует непрерывное отображение диска $\gamma_\alpha^k : D^k \to X$ такое, что $\gamma_\alpha^k\big|_{\mathrm{Int}(D^k)}$ — гомеоморфизм на e_α^k, а $\gamma_\alpha^k(\partial D^k)$ содержится в объединении конечного множества клеток e_β^i с $i < k$ (т.е. меньшей размерности).

(W) множество $F \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто его пересечение с замыканием любой клетки.

n-мерный остов $\mathrm{sk}_n X$ — объединение всех клеток размерности не выше n. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ двух клеточных пространств называется *клеточным*, если $f(\mathrm{sk}_n X) \subset \mathrm{sk}_n Y$.

Ограничение характеристического отображения $\gamma_\alpha^k : D^k \to X$ на границу диска D^k представляет собой отображение (уже не обязательно гомеоморфизм !) $S^{k-1} \to X$, а по аксиоме (C) — отображение $f_\alpha^k : S^{k-1} \to \mathrm{sk}_{k-1}(X)$. Для каждой клетки e_β^{k-1} рассмотрим отображение $\pi_\beta^{k-1} : \mathrm{sk}_{k-1}(X) \to S^{k-1}$, получающееся стягиванием в точку всех клеток $\mathrm{sk}_{k-1}(X)$ (всех размерностей), кроме самой e_β^{k-1}. Степень композиции $\pi_\beta^{k-1} \circ f_\alpha^k : S^{k-1} \to S^{k-1}$ называется *коэффициентом инцидентности* клеток e_α^k и e_β^{k-1} и обозначается $[e_\alpha^k : e_\beta^{k-1}]$.

Задача 1. Докажите, что клеточное пространство X связно $\Leftrightarrow$ линейно связно $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sk}_1 X$ линейно связен.

Задача 2. Докажите, что клеточное пространство компактно тогда и только тогда, когда оно состоит из конечного числа клеток.

Во всех следующих задачах нужно, если не указано иное, построить клеточное разбиение топологического пространства X. Если даны несколько пространств и отображения между ними, то нужно подобрать клеточные разбиения так, чтобы отображением были клеточными. При возможности следует также вычислять коэффициенты инцидентности клеток.

Задача 3. $X = S^1$; $X = S^n$.

Задача 4. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. $f : X \to S^1$, $g : S^1 \to X$ — стандартная гомотопическая эквивалентность.

Задача 5. X — двумерное многообразие: тор $(S^1 \times S^1)$; сфера с g ручками; бутылка Клейна; проективная плоскость; бутылка Клейна и проективная плоскость с g ручками; те же многообразия из которых вырезано n дырок.

Указание: Для всех написанных пространств существует клеточное разбиение с единственной двумерной клеткой. Все поверхности с дырками гомотопически эквивалентны своим одномерным остовам.

Задача 6. $X = X_1 \times X_2$, где X_1 и X_2 — конечные клеточные пространства, клеточные разбиения которых известны. $f_i : X \to X_i$ $(i = 1, 2)$ — проекции прямого произведения на сомножители.

Задача 7. $X = \mathbb{R}P^n$. $f : S^n \to X$ — стандартное двулистное накрытие.

Задача 8. $X = \mathbb{C}P^n$. $f : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ — обобщенное расслоение Хопфа.

Задача 9. $X = S^\infty$ — множество бесконечных последовательностей $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, члены которых равны нулю, начиная с некоторого номера (своего для каждой последовательности), и $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = 1$. $X = \mathbb{C}P^\infty$ (дайте определение !). $f : S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ — аналог расслоения Хопфа.

Задача 10. $X = G(2, 4, \mathbb{R})$; $X = G(2, 4, \mathbb{C})$; $X = G(n, k, \mathbb{R})$; $X = G(n, k, \mathbb{C})$.

Указание: Клеточное разбиение грассманиана это разбиение его на клетки Шуберта (см. листок “Грассмановы многообразия”). Требуется явно указать характеристические отображения и вычислить коэффициенты инцидентности клеток.