Грассмановы многообразия

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^n$ с фиксированным базисом $e_1, \ldots, e_n$. Для произвольного подпространства $V \subset \mathbb{R}^n$ размерности k обозначим $a_s = \dim V \cap \langle e_1, \ldots, e_s \rangle$.

Задача 1. Докажите следующие свойства последовательности a_s:

a) $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$;

b) $1 - a_1 \leq 2 - a_2 \leq \ldots \leq n - a_n$.

Задача 2. Назовем индекс s *ведущим*, если $a_s > a_{s-1}$. Докажите, что в подпространстве V существует единственный базис $v_1, \ldots, v_k$ такой, что $v_i = e_{m_i} + f_i$, где m_i — i-й по величине ведущий индекс, а $f_i = \sum_t \alpha_t^{(i)} e_t$, где в сумме все индексы t меньше m_i, и среди них нет ведущих.

Задача 3. Докажите, что множество $D(a_1, \ldots, a_n)$ подпространств $V \subset \mathbb{R}^n$ с заданной последовательностью a_s гомеоморфно $\mathbb{R}^m$, и найдите m. Опишите явно эти множества в случаях $k = 1$ ($\mathbb{R}P^{n-1}$) и $k = 2, n = 4$ ($G(2,4)$).

Задача 4. Для каких последовательностей $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ множество $D(a_1, \ldots, a_n)$ принадлежит замыканию множества $D(b_1, \ldots, b_n)$?

Задача 5. Опишите явно характер примыкания множеств $D(a_1, \ldots, a_n)$ друг к другу для $\mathbb{R}P^n$ и $G(2,4)$.

Задача 6. Докажите, что множество $G_+(2,4)$ ориентированных двумерных подпространств $\mathbb{R}^4$ двулистно накрывает $G(2,4)$ и гомеоморфно $S^2 \times S^2$.