Сингулярные гомологии

Пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ — окружность, а f_α — сингулярный 1-симплекс, заданный формулой $f_\alpha(t) = \exp(2\pi i\alpha t)$, $t \in [0,1]$.

Задача 1. Докажите, что а) $\partial f_\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$; b) f_α гомологично нулю (является границей сингулярной 2-цепи) только при $\alpha = 0$; c) f_n гомологично nf_1, где $n \in \mathbb{Z}$; d) всякий сингулярный 1-цикл на S^1 гомологичен kf_1 для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.

Из задачи 1 следует, что $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Известно также, что $H_0(S^1) = \mathbb{Z}$. Рассмотрим отображение $F_n : S^1 \to S^1$, заданное формулой $F_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. Докажите, что отображение $(F_n)_* : H_0 \to H_0$ — тождественное при всех n, а отображение $(F_n)_* : H_1 \to H_1$ представляет из себя умножение на n.

Задача 3. Пусть $F : S^n \to S^n$ — гомеоморфизм. Докажите, что отображение $F_* : H_n \to H_n$ является умножением на ± 1 в зависимости от того, сохраняет F ориентацию или меняет.

Задача 4. Опишите точную гомологическую последовательность пары (X, A), где а) X — совокупность 2 непересекающихся окружностей, A — множество из 2 точек, по одной на каждой окружности; b) $X = [0,1]$, $A = \{0, 1/2, 1\}$; c) X — n-мерная сфера с k дырками, $A = \partial X$ — совокупность границ дырок.

Пусть $F : S^n \to S^n$ — гладкое отображение, и пусть $a \in S^n$ — его регулярное значение (т.е. для всякого x такого, что $f(x) = a$, дифференциал $Df(x)$ невырожден).

Задача 5. Докажите, что отображение $F_* : H_n \to H_n$ представляет из себя умножение на некоторое число k.

Число k называется *степенью* отображения F и обозначается $\deg(F)$.

Задача 6. Докажите, что прообраз $f^{-1}(a)$ состоит из конечного числа точек $x_1, \dots, x_N$. Докажите, что если U — достаточно малая окрестность точки a, то $f^{-1}(S^n \setminus U)$ представляет собой сферу с N дырками $U_1, \dots, U_N$.

Таким образом, F можно рассмотреть как отображение пар $F : (S^n \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_N), \partial U_1 \cup \ldots \cup \partial U_n) \to (S^n \setminus U, \partial U)$.

Задача 7. Выпишите (пользуясь результатом задачи 4) точные гомологические последовательности пар $(S^n \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_N), \partial U_1 \cup \ldots \cup \partial U_n)$ и $(S^n \setminus U, \partial U)$. Опишите (пользуясь результатом задачи 3) гомоморфизм F_* на элементах этой последовательности.

Задача 8. Докажите, что $\deg(F) = \sum_{i=1}^N \operatorname{sign}\det DF(x_i)$ (и, тем самым, сумма в правой части не зависит от выбора регулярного значения a). Приведите пример отображения $S^n \to S^n$ заданной степени k.