Математический Колледж НМУ **Топология, 3 семестр**

Теория Морса

Шарнирный механизм состоит из 3 звеньев длиной $AB = 1$, $BC = 1/2$, $CD = 1$. Точка A закреплена в начале координат, а точка D может свободно скользить по оси абсцисс.

Задача 1. Докажите, что конфигурационное пространство шарнирного механизма является гладким двумерным компактным ориентируемым многообразием.

Рассмотрим функцию f на конфигурационном пространстве, равную x-координате вершины D.

Задача 2. Найдите критические точки функции f. Докажите, что они все невырожденные, и вычислите их индексы.

Задача 3. Найдите род (число ручек) конфигурационного пространства.

Задача 4. Опишите линии уровня функции f и их перестройки при проходе через критическое значение.

Задача 5. Вычислите комплекс Морса функции на сфере с g ручками, получающейся малым шевелением "функции высоты" при стандартном вложении этого многообразия в $\mathbb{R}^3$.

Задача 6. Остров в океане имеет форму кольца. Докажите, что на нем есть хотя бы одна вершина и по крайней мере один перевал (рельеф считаем гладким).

Пусть $A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ — симметрический оператор. Рассмотрим функцию (Ax, x) на единичной сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (скобки означают стандатное скалярное произведение).

Задача 7. Докажите, что точка $x \in S^n$ — критическая точка функции (Ax, x), если и только если x — собственный вектор оператора A.

Таким образом, множество собственных значений оператора A совпадает с множеством критических значений функции (Ax, x) на сфере S^n.

Задача 8. Выведите из задачи 7, что симметрический оператор A диагонализуем в некотором ортогональном базисе.

Задача 9. Как могут быть устроены множества критических точек функции (Ax, x) ?

Задача 10. Пусть собственные числа оператора A все различны: $\lambda_1 < \ldots < \lambda_{n+1}$. Докажите, что в этом случае отвечающие им критические точки все невырождены. Вычислите индекс критической точки x с критическим значением λ_i.

Функция (Ax, x) на сфере S^n четна. Следовательно, она определяет функцию F на проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$.

Задача 11. Решите аналог задачи 10 для функции F на $\mathbb{R}P^n$. Найдите комплексные аналоги этой задачи.

Задача 12. Рассмотрим функцию F на $\mathbb{R}P^2$ из предыдущей задачи, построенную по симметричному оператору с собственными числами а) 0,1,2; б) 0,1,1; в) 0,0,1.

1. Опишите множество $\{x \in \mathbb{R}P^2 \mid F(x) = a\}$ при $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{3}{2}$.
2. Обозначим через M_a множество $\{x \in \mathbb{R}P^2 \; midF(x) \leq a\}$. Вычислите точную гомологическую последовательность пары (M_a, M_b) при $a, b \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$

Следующая задача иллюстрирует трудности при построении теории Морса на некомпактных многообразиях.

Задача 13. Существует ли на $\mathbb{R}^2$ морсовская функция,

1. Имеющая две точки максимума и ни одной точки минимума ?
2. Имеющая две точки максимума и более не имеющая ни одной критической точки ?
3. Имеющая единственную критическую точку, являющуюся точкой локального минимума, но при этом неограниченная снизу ?

Ответ: во всех пунктах этой задачи — положительный !