Индекс пересечения

Задача 1. Для перечисленных ниже пространств найдите базисы в гомологиях всех размерностей и вычислите индексы пересечения базисных элементов гомологий дополнительных размерностей. В неориентируемом случае все вычисления следует проводить над $\mathbb{Z}_2$; в ориентируемом — над $\mathbb{Z}$ и над $\mathbb{Z}_2$. Пространства:

1) Сфера с g ручками; 2) $\mathbb{R}P^2$ и бутылка Клейна; 3) S^n с k дырками; 4) $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$; 5) $G(2,4)$; 6) $\mathbb{R}^2$ по модулю двух точек.

Задача 2. На сфере S^n задана гладкая нечетная функция f, для которой 0 не является критическим значением. Докажите, что образ $p(M)$ многообразия $M = \{x \in S^n \mid f(x) = 0\}$ при стандартной проекции $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ представляет нетривиальный элемент в $H_{n-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$.

Указание: Стандартная образующая в $H_{n-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ это p(экватор сферы).

Задача 3. На сфере S^n заданы две непрерывные нечетные функции, f_1 и f_2. Докажите, используя результаты задач 2 и 1.4, что на сфере существует точка, в которой они обе принимают значение 0. Эквивалентная (почему ?) формулировка: не существует непрерывного нечетного отображения $S^n \to S^1$.

Указание: Предположите вначале, что функции f_1 и f_2 удовлетворяют условиям задачи 2; потом приблизьте произвольные функции такими.

Задача 4. Пусть K — вложение (с пересечениями) графа "три дома — три колодца" в $\mathbb{R}^2$. Докажите, используя результат задачи 1.6, что сумма индексов пересечения $\operatorname{mod} 2$ по всем парам несмежных (не имеющих общих вершин) ребер равна 1. Отсюда следует, что вложения без пересечений ребер не существует.

Задача 5. Пусть M — ориентируемое многообразие, $f : M \to M$ — гладкое отображение, а a, b — классы гомологий дополнительной размерности. Обозначим $[f] \subset M \times M$ график отображения f. Докажите, что $(f_*(a_1), a_2) = (-1)^{\dim a}([f], a \times b)$. Здесь в левой части стоит индекс пересечения в M, в правой — в $M \times M$. Выпишите эту формулу явно в случае $f = \mathrm{id}$; что такое в этом случае график ?

Указание: При необходимости можете сделать упрощающие предположения "типа гладкости" относительно классов a и b и отображения f, но сформулируйте их явно ! Например, можно предположить, что классы a и b реализуются многообразиями.

Задача 6. Пусть a_1, a_2, b_1, b_2 — циклы в многообразии M. Докажите, что в многообразии $M \times M$ имеет место равенство $(a_1 \times a_2, b_1 \times b_2) = (-1)^{\dim a_2 \dim b_1}(a_1, b_1)(a_2, b_2)$. При необходимости можете сделать те же упрощающие предположения, что и в задаче 5.

Задача 7. Пусть $a_1, \dots, a_N$ — базис в гомологиях многообразия M (всех размерностей; сначала идут нульмерные гомологии, потом одномерные, и т.д.) с коэффициентами в $\mathbb{R}$. Пусть $a_1^*, \dots, a_N^*$ — двойственный базис, т.е. $(a_i, a_j^*) = \delta_{ij}$. Докажите, что диагональ $\Delta = \{(x, x) \subset M \times M \mid x \in M\}$ гомологична (с коэффициентами в $\mathbb{R}$) сумме $\sum_{i=1}^N a_i \times a_i^*$.

Указание: Два цикла гомологичны с коэффициентами в $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ их индексы пересечения с любым циклом нужной размерности одинаковы. Покажите, что в "средних" гомологиях $M \times M$ выражения $a_p^* \times a_q$, $p, q = 1, \dots, N$ составляют базис, и воспользуйтесь задачей 5.

Задача 8. Пусть M — ориентируемое n-мерное многообразие, и $f : M \to M$ — гладкое отображение. Пусть $f_*^{(k)} : H_k(M, \mathbb{R}) \to H_k(M, \mathbb{R})$ — индуцированное отображение гомологий. Докажите, что $([f], \Delta) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \operatorname{Tr} f_*^{(k)}$ (в обозначениях задач 5 и 7). Интерпретируйте левую часть равенства в терминах неподвижных точек отображения f.

Задача 9. Докажите, что отображение сферы S^n в себя степени, отличной от $(-1)^{n+1}$, имеет неподвижную точку.