Умножение в когомологиях

Факт: Пусть M — компактное ориентируемое многообразие без края, и когомологические классы $\alpha \in H^k(M)$ и $\beta \in H^l(M)$ переходят при изоморфизме Пуанкаре в гомологические классы, представленные ориентированными многообразиями a и b (размерности $n-k$ и $n-l$ соответственно), находящимися в общем положении. Тогда пересечение многообразий $a \cap b$ является многообразием размерности $n-k-l$, представляющим гомологический класс, переходящий при изоморфизме Пуанкаре в $ab \in H^{k+l}(M)$. То же самое верно в неориентируемом случае для гомологий и когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

Задача 1. Уточните, как нужно ориентировать пересечение $a \cap b$.

Задача 2. Вычислите умножение в когомологиях (в стандартном базисе) 1) S^1; 2) S^n; 3) сферы с g ручками; 4) $\mathbb{R}P^2$; 5) бутылки Клейна; 6) $\mathbb{T}^n$; 7) $\mathbb{C}P^n$; 8) $\mathbb{R}P^n$. Для неориентируемых многообразий вычисление производите с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, а для ориентируемых — в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$.

Задача 3. Решите задачу 3 листка "Индекс пересечения", с заменой S^2 на S^n, и 2 нечетных функций — на n. Докажите, что не существует нечетного отображения $S^n \to S^{n-1}$.

Задача 4. Дано нечетное отображение $f : S^n \to S^n$; его можно рассматривать как отображение $f : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$. Докажите, что $f_*\gamma = \gamma$, где γ — стандартная образующая $H_1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$.

Задача 5. Докажите, что утверждение задачи 4 имеет место и с заменой γ на δ — стандартную образующую $H_{n-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$.

Задача 6. Пусть f — нечетное отображение $S^n \to S^n$, a, b — диаметрально противоположные точки S^n, соединенные кривой γ. Докажите, что прообраз $f^{-1}(\gamma)$ пересекается с экватором сферы S^n в нечетном числе точек. Предполагается, что ситуация — общего положения, т.е. пересечение трансверсально, и прообразы точек a и b не лежат на экваторе.

Задача 7. Докажите, что степень нечетного отображения $f : S^n \to S^n$ нечетна (или, что то же самое, степень $\mathrm{mod}2$ равна 1).