Математический Колледж НМУ **Топология, 3 семестр**

Экзамен 12 декабря 1998 г.

Задача 1. Найдите гомологии множества наборов из n комплексных чисел $(z_1, \ldots, z_n)$, удовлетворяющих условию $z_1 \ldots z_n \neq 0$.

Задача 2. Вычислите род (число ручек) двумерного многообразия $\{(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3 \mid \sin\varphi_1 + 2\sin\varphi_2 + 3\cos(\varphi_1 + \varphi_3) = 3\}$.

Задача 3. Сфера S^∞ определяется как множество последовательностей $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, у которых только конечное количество членов отлично от нуля, и $\sum_{k=1}^\infty x_k^2 = 1$. Постройте клеточное разбиение S^∞ и вычислите ее кольцо когомологий.

Задача 4. Скалярное произведение на пространстве кватернионов (которое отождествляется с $\mathbb{R}^4$) определяется формулой $(z, w) = \mathrm{Re}(z\overline{w}) = \mathrm{Re}(\overline{z}w)$. Найдите индекс пересечения в многообразии $\mathrm{SO}(4)$ циклов $f_*(\nu)$ и $g_*(\nu)$, где ν — образующая трехмерных гомологий группы G кватернионов единичной длины, а отображения $f : G \to \mathrm{SO}(4)$ и $g : G \to \mathrm{SO}(4)$ сопоставляют кватерниону $\alpha \in G$ ортогональные преобразования $z \mapsto z\alpha$ и $z \mapsto \alpha^{-1}z$ соответственно.

Задача 5. Сфера с двумя ручками вложена стандартным образом в $\mathbb{R}^3$. Существует ли на ограниченной ею в $\mathbb{R}^3$ области Ω векторное поле единичной длины, в точках границы $\partial\Omega$ направленное по внешней нормали ?