РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ
Семинары
С. К. Ландо, С. М. Натанзон

1999 г.

Семинар 1
10 сентября 1999 г.

1. Докажите, что комплексная кривая является ориентируемой двумерной поверхностью.

2. Докажите, что степень ветвления функции в точке не зависит от выбора локальной карты в этой точке.

3. Пусть n — порядок ветвления функции f в точке z_0. Докажите, что $f(z) = f(z_0)+(z-z_0)^n$ в некоторой локальной карте с центром в z_0.

4. К какой нормальной форме можно привести голоморфное однопараметрическое семейство функций $f(z,t)$ в окрестности точки $z = 0$, если $f(0,t) \equiv 0$ и а) $f(z,0) = z$; б) $f(z,0) = z^2$?

5. Докажите, что число нулей непостоянной функции равно числу ее полюсов (с учетом кратностей).

6. Пусть $f : C_1 \to C_2$ — непостоянный морфизм кривых. Докажите, что сумма кратностей прообразов любой точки в образе конечна и не зависит от выбора этой точки. Эта сумма называется *степенью* морфизма.

7. Докажите *формулу Римана–Гурвица* для непостоянного морфизма $f : C_1 \to C_2$:

   $$\chi(C_2) = d(f)\chi(C_1) + \sum(\nu_i - 1),$$

   где χ — эйлерова характеристика поверхности, $d(f)$ — степень морфизма f, ν_i — кратность критической точки морфизма f и суммирование ведется по всем критическим точкам этого морфизма.

   Замечание: иногда удобно считать, что суммирование ведется по всем точкам прообраза (и вклад некритических точек равен нулю).

8. Выведите из формулы Римана–Гурвица, что на поверхности рода $g \geq 1$ не существует мероморфной функции с одним простым полюсом.

9. Выведите из формулы Римана–Гурвица, что группа автоморфизмов поверхности рода $g \geq 2$ не может содержать более $84(g-1)$ элементов.

10. Докажите, что группа монодромии общего накрытия степени d изоморфна симметрической группе S_d. (Накрытие *общее*, если все точки ветвления имеют порядок 2 и их образы различны.)

Семинар 2
17 сентября 1999 г.

1. Докажите, что уравнение $w^2 = P(z)$, где P — многочлен без кратных корней, задает комплексную кривую. Такая кривая называется *гиперэллиптической*.

2. Докажите, что род гиперэллиптической кривой, заданной многочленом степени d, равен $[d/2]$.

3. Пусть плоская кривая задана уравнением $F(z,w) = 0$, и Σ_w (соотв., Σ_z) — множество точек кривой, в которых ее проекция на ось w (соотв., на ось z) имеет особенности. Докажите, что на дополнении к $\Sigma_w \cup \Sigma_z$ комплексные структуры, задаваемые обоими проектированиями, совпадают.

4. Приведите примеры мероморфных функций на плоских кривых. Укажите их нули и полюса, а также их порядки.

5. Докажите, что род гладкой плоской кривой степени d равен $(d-1)(d-2)/2$.

6. Докажите, что пересечение двух плоских кривых степеней d_1 и d_2, не имеющих общих компонент, состоит из $d_1 d_2$ точек.

7. Докажите, что на кривой не существует голоморфных 2-форм.

8. Докажите, что ограничение рациональной функции от двух переменных на плоскую кривую, не имеющую компонент среди полюсов функции, задает на этой кривой мероморфную функцию.

9. Докажите, что число нулей (с учетом кратностей) мероморфной функции на кривой равно числу ее полюсов.

10. Пусть P — многочлен степени d_1 от двух переменных. Какую степень имеет его ограничение на плоскую кривую степени d_2?

11. Верно ли, что любая мероморфная функция на гиперэллиптической кривой является ограничением на нее рациональной функции на плоскости?

Семинар 3
24 сентября 1999 г.

1. Какие нули и полюса имеет форма dz на проективной прямой?

2. Докажите, что на гиперэллиптической кривой, заданной уравнением $w^2 = P_{2g+2}(z)$, формы $z^{r-1}dz/w$ $r = 1, \dots, g$ голоморфны и линейно независимы. Где расположены нули и полюса этих форм?

   Дивизором D на кривой называется алгебраическая комбинация из конечного множества точек кривой с целыми коэффициентами. *Степенью дивизора* $\deg D$ называется сумма его коэффициентов. *Дивизором* (f) *мероморфной функции* f *(главным дивизором)* (соотв., дивизором (ω) мероморфного дифференциала ω (*каноническим дивизором*)) называется алгебраическая комбинация ее (соотв., его) нулей и полюсов с коэффициентами, равными их кратности, причем кратность нулей берется со знаком плюс, а кратность полюсов — со знаком минус.

3. Докажите, что степень главного дивизора равна 0.

4. Докажите, что степень канонического дивизора не зависит от выбора мероморфной формы на данной кривой, а зависит лишь от рода кривой. Чему она равна на кривой данного рода g?

5. Докажите, что множество всех дивизоров образует абелеву группу относительно естественной операции сложения, а множество главных дивизоров — подгруппу в ней.

6. Докажите, что на проективной прямой любой дивизор степени 0 является главным, а любой дивизор степени -2 — каноническим. Верно ли аналогичное утверждение для эллиптических кривых?

7. Укажите мероморфный дифференциал на эллиптической кривой, не обращающийся в нуль.

8. Докажите, что для непостоянного голоморфного отображения $f : C_1 \to C_2$ голоморфных кривых и канонических дивизоров K_i на C_i, $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} K_1 &= f^* K_2 + B \\ \deg K_1 &= \deg f^* \deg \mathrm{K}_2 + \sum_p (v(p) - 1), \end{aligned}$$

   где суммирование ведется по всем точкам ветвления $p \in C_1$ отображения f и $v(p)$ — порядок ветвления в такой точке.

9. Найдите формулу замены матрицы периодов при симплектической замене базиса циклов.

10. Докажите, что если все A-периоды голоморфной 1-формы равны нулю, то и сама форма равна 0.

Семинар 4
1 октября 1999 г.

Теорема Римана–Роха. Для дивизора D на кривой рода g

$$r(-D) = \deg D - g + i(D) + 1,$$

где $r(D)$ (соотв., $i(D)$) — размерность пространства $L(D)$ мероморфных функций f (соотв., пространства $\Omega(D)$ мероморфных дифференциалов ω), таких что $(f) \geq D$ (соотв., $(\omega) > D$).

1. Найдите $r(D), i(D)$ для произвольного дивизора D а) на проективной прямой; б) на эллиптической кривой. Проверьте выполнение теоремы Римана–Роха.

2. Докажите, что если p, q — точки гиперэллиптической кривой, симметричные относительно инволюции, то $r(-(p + q)) = 2$. Верно ли это для произвольной пары точек на гиперэллиптической кривой?

3. Докажите, что если на кривой имеется мероморфная функция степени 2, то кривая гиперэллиптична.

4. Проверьте выполнение теоремы Римана-Роха для дивизоров $p, p + q$ на гиперэллиптической кривой.

   Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис пространства голоморфных форм на кривой рода g. *Каноническим отображением* кривой называется ее отображение в P^{g-1}, заданное формулой $p \mapsto [\omega_1(p) : \ldots : \omega_g(p)]$.

5. Найдите степень канонического отображения гиперэллиптической кривой.

6. Найдите степень образа канонического отображения кривой рода g.

7. Докажите, что каноническое отображение кривой рода 2 не является вложением.

Дополнительная задача.

8. Выведите из теоремы Римана–Роха решение задачи Миттаг-Леффлера: мероморфная функция $f : C \to \mathbb{CP}^1$ с заданными главными частями $p_1, \ldots, p_n$ в n точках $x_1, \ldots, x_n \in C$ существует тогда и только тогда, когда сумма вычетов $\mathrm{Res}_{x_1} p_1\omega + \ldots + \mathrm{Res}_{x_n} p_n\omega$ равна нулю для любой голоморфной 1-формы ω на C.

Семинар 5
8 октября 1999 г.

Фиксируем на кривой C некоторый базис пространства голоморфных форм, и пусть в некоторой координате с центром в некоторой точке z_0 базисные формы имеют вид $\varphi_1(z)dz$, …, $\varphi_g(z)dz$. Назовем *весом* точки p порядок нуля функции

$$W(z) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_1'(z) & \ldots & \varphi_1^{(g-1)}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_g(z) & \varphi_g'(z) & \ldots & \varphi_g^{(g-1)}(z) \end{pmatrix}$$

в этой точке. Точка называется *точкой Вейерштрасса*, если ее вес больше нуля.

1. Докажите, что в точке Вейерштрасса p выполняется неравенство $r(-kp) > 1$ для некоторого $k < g$, т.е. на кривой существует непостоянная мероморфная функция с единственным полюсом порядка k в точке p.

2. Докажите, что на проективной прямой и на эллиптических кривых нет точек Вейерштрасса.

3. Докажите, что число точек Вейерштрасса на кривой конечно.

4. Докажите, что суммарный вес точек Вейерштрасса на кривой рода g равен $(g-1)g(g+1)$.

   Натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, для которых не существует мероморфных функций с полюсом порядка a_k в данной точке p (т.е. $r(-a_k p) = r(-(a_k - 1)p)$) называются *пробелами* (или *лакунами*) в точке p.

5. Докажите, что если p — не точка Вейерштрасса, то пробелы в ней имеют вид $1, \ldots, g$.

6. Докажите, что в любой точке ровно g пробелов.

7. Докажите, что вес любой точки равен $\sum_k (a_k - k)$.

8. Опишите точки Вейерштрасса на гиперэллиптической кривой и пробелы в этих точках. Проверьте для них предыдущие формулы.

9. Докажите, что при $g > 1$ для любой точки p верно $a_1 = 1$.

10. Докажите, что если $a_2 > 2$ для некоторой точки кривой, то кривая гиперэллиптическая.

11. Докажите, что вес точки не может превышать $g(g-1)/2$. Выведите отсюда, что на кривой не может быть больше $2(g+1)$ точки Вейерштрасса.

12. Докажите, что каноническое отображение негиперэллиптической кривой является вложением.

13. Докажите, что всякий биголоморфный автоморфизм эллиптической кривой $w^2 = P_{2g+2}(z)$, $g \geq 2$ можно записать в виде

$$(z, w) \mapsto \left(\frac{az+b}{cz+d}, \pm w \right).$$

Коллоквиум по тета-функциям
19 ноября 1999 г.

1. Докажите законы периодичности для θ-функции Римана:

$$\theta(z + 2\pi i e_k) = \theta(z); \theta(z + 2\pi i f_k) = \exp\left(-\frac{1}{2}B_{kk} - z_k\right)\theta(z).$$

2. Докажите, что $\theta[\alpha, \beta](z)$ четная, если $[\alpha, \beta]$ — четный полупериод (т.е. если все α_i, β_j равны 0 или $1/2$ и $4 < \alpha, \beta > \equiv 0 \bmod 2$), и нечетная, если $[\alpha, \beta]$ — нечетный полупериод.

3. Докажите, что одномерный комплексный тор $T^2 = \mathbf{C}/\{2m\omega + 2n\omega'\}$ комплексно изоморфен эллиптической кривой, для которой он является абелевым многообразием.

4. Для произвольных вещественных g-мерных векторов $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ справедливо равенство

$$\theta[\alpha,\gamma](z_1+z_2)\theta[\beta,\epsilon](z_1-z_2] = \sum_{2\delta\in(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}))^g} \hat{\theta}\left[\frac{\alpha+\beta}{2}+\delta, \gamma+\epsilon\right](2z_1)\hat{\theta}\left[\frac{\alpha-\beta}{2}+\delta, \gamma-\epsilon\right](2z_2),$$

где

$$\theta[\alpha,\beta] \equiv \theta[\alpha,\beta](z|B); \quad \hat{\theta}[\alpha,\beta](z) \equiv \theta[\alpha,\beta](z|2B).$$

5. Для произвольных вещественных $2g$-мерных вещественных векторов $[m_i] = [m_i', m_i'']$ справедливо равенство

$$\theta[m_1](z_1)\theta[m_2](z_2)\theta[m_3](z_3)\theta[m_4](z_4) =$$

$$= \frac{1}{2^g} \sum_{2a\in\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{2g}} \exp(-4\pi i < m_1', a'' >)\theta[n_1+a](w_1)\theta[n_2+a](w_2)\theta[n_3+a](w_3)\theta[n_4+a](w_4),$$

где $a = (a', a'')$, $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4)T$, $[n_i] = [n_i', n_i'']$, $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (n_1, n_2, n_3, n_4)T$,

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(каждая единица в матрице T есть единичная $g \times g$- или $2g \times 2g$-матрица).

6. Докажите, что функция $F(P) = \theta(A(P) - e)$, где A — отображение Абеля, на разрезанной кривой Γ имеет в точности g нулей, если она не равна нулю тождественно.

7. Докажите, что вектор K римановых констант имеет вид $2K = -A(C)$, где C — канонический дивизор кривой.

8. Докажите, что функция F тождественно равна нулю тогда и только тогда, когда e представляется в виде $e = A(Q_1) + \ldots + A(Q_g) + K$, где дивизор $Q = Q_1 + \ldots + Q_g$ — специальный, а K — вектор римановых констант.

9. Зафиксируем на гиперэллиптической римановой поверхности $w^2 = P_{2g+1}(z)$ точку $P = \infty$. Пусть z-координаты точек $P_1, \ldots, P_g$ — решения задачи обращения Якоби $A(P_1) + \ldots + A(P_g) = \zeta$ — равны $z_1, \ldots, z_g$. Докажите, что сумма первых и вторых степеней $\sigma_1(\zeta) = z_1 + \ldots + z_g$, $\sigma_2(\zeta) = z_1^2 + \ldots + z_g^2$ представляются в виде

$$\sigma_1(\zeta) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(\zeta + K) + c_1$$

$$\sigma_2(\zeta) = \left(-\frac{4}{3}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{1}{6}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right) \ln \theta(\zeta + K) + c_2,$$

где c_1, c_2 — константы, зависящие только от римановой поверхности и выбранного на ней базиса циклов. Здесь $\partial/\partial x = \sum U_i \partial/\partial\zeta_i$, $\partial/\partial t = \sum W_i \partial/\partial\zeta_i$, а векторы U и W есть векторы b-периодов нормированных дифференциалов второго рода, имеющих в точке ∞ полюсы с главной частью вида $d\tau/\tau^2$ и $3d\tau/\tau^4$ соответственно.

10. Докажите, что функция $u = 2\sigma_1$, где $\sigma_1(x)$ определена в предыдущей задаче, является решением уравнения Кортевега–де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}\left(6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right).$$

11. Докажите, что обращение отображения Абеля

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \int_{P_0}^{P_1} \frac{dz}{w} + \int_{P_0}^{P_2} \frac{dz}{w}; \\ \zeta_2 &= \int_{P_0}^{P_1} \frac{z\,dz}{w} + \int_{P_0}^{P_2} \frac{z\,dz}{w} \end{aligned}$$

на гиперэллиптической кривой $w^2 = P_5(z)$ дается решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = 0, \quad \frac{d\zeta_2}{dx} = 1; \qquad \frac{d\zeta_1}{dt} = 1, \quad \frac{d\zeta_2}{dt} = 0.$$

12. Докажите, что пространство $\Lambda(D)$ функций Бейкера–Ахиезера для неспециального дивизора D степени g и общего многочлена q одномерно.

13. Пусть

$$\psi(x, y, t; P) = e^{kx + k^2 y + k^3 t}\left(1 + \frac{\xi_1}{k} + \frac{\xi_2}{k^2} + \ldots\right)$$

одноточечная функция Бейкера–Ахиезера, построенная по многочлену $q(k) = kx + k^2 y + k^3 t$ и некоторому неспециальному дивизору D, $u = -2\frac{\partial \xi_1}{\partial x}$, $w = 3\xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + 3\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} - 3\frac{\partial \xi_2}{\partial x}$. Докажите, что ψ есть решение системы уравнений

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = L\psi; \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = A\psi,$$

где

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u; \qquad A = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x} + w.$$

14. Докажите, что функция Бейкера–Ахиезера на эллиптической кривой $w^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$, параметризованной функцией Вейерштрасса $z = \mathcal{P}(u)$, $w = \mathcal{P}'(u)$ с существенно особой точкой в бесконечности, построенная по дивизору u_1, имеет вид

$$\psi(x;P) = \frac{\sigma(u - u_1 - x)e^{x\zeta(u)}}{\sigma(u - u_1)\sigma(u_1 + x)}.$$

15. Докажите, что выписанная в предыдущей задаче функция является собственной для оператора Ламе:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\mathcal{P}(x)\right)\psi(x;P) = \mathcal{P}(u)\psi(x;P).$$

16. Пусть D — дивизор общего положения степени $d \geq g$. Докажите, что пространство $\Lambda(D)$ одноточечных функций Бейкера–Ахиезера для этого дивизора имеет размерность $d - g + 1$ для многочлена q с достаточно малыми коэффициентами.

17. Найдите размерность пространства $\Lambda(D)$ функций Бейкера–Ахиезера ψ на кривой рода g относительно неспециального дивизора D степени $d = g + 1$, таких что $\psi(Q_1) = \psi(Q_2)$ для некоторой фиксированной пары точек Q_1, Q_2 на кривой.