АЛГЕБРА 1999/2000
I СЕМЕСТР
Листок 1

Ф. Зак, А. Иншаков, А. Обломков, С. Дориченко

Определение 1.1. Пусть A — множество, на котором заданы бинарные операции сложения $+$ и умножения $\cdot$, т. е. каждой паре (a,b), $a,b \in A$ сопоставлены элементы $a+b \in A$ и $a \cdot b \in A$, называемые соответственно *суммой* и *произведением* a и b. Множество A называется *кольцом с единицей*, если выполнены следующие условия:

(AA) Для любых трёх элементов $a,b,c \in A$ выполнено равенство

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

(аддитивная ассоциативность).

(AC) Для любой пары элементов $a,b \in A$ имеем

$$a + b = b + a$$

(аддитивная коммутативность).

(AZ) Существует элемент $0 \in A$, называемый *нулём*, для которого

$$a + 0 = a$$

для всех $a \in A$;

(AI) Для всякого $a \in A$ существует элемент $-a \in A$ такой, что

$$a + -a = 0.$$

Элемент $-a$ называется *противоположным* или *обратным по сложению* к a.

(MA) Для любых трёх элементов $a,b,c \in A$ выполнено равенство

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(мультипликативная ассоциативность).

(MI) Существует элемент $1 \in A$, называемый *единицей*, для которого

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

для всех $a \in A$.

(D) Для любых трёх элементов $a,b,c \in A$ выполнено равенство

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(дистрибутивность).

Кольцо A называется *коммутативным*, если выполнено условие

(MC) Для любой пары элементов $a, b \in A$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(мультипликативная коммутативность).

Кольцо A называется *телом*, если выполнено условие

(MI) Для всякого $a \in A$, $a \neq 0$ существует элемент $a^{-1} \in A$ такой, что

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Элемент a^{-1} называется *обратным* (по умножению) к a.

Коммутативное тело (т. е. тело, удовлетворяющее условию **(MC)**) называется *полем*.

В этом листке мы будем рассматривать только коммутативные кольца.

Примеры. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ является кольцом.

Если A — кольцо, то множество многочленов $A[T]$ от переменной T с коэффициентами в A является кольцом относительно обычных операций сложения и умножения.

Множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и вещественных чисел $\mathbb{R}$ являются полями относительно обычных операций.

Если K — поле, то множество рациональных функций $K(T)$ от переменной T с коэффициентами в K является полем (напомним, что $K(T) = \left\{\frac{P(T)}{Q(T)}\right\}$, где $P(T)$ и $Q(T) \neq 0$ — многочлены; операции сложения и умножения определяются как для рациональных чисел).

Если S — произвольное множество, A — кольцо, а $\mathcal{M}(S, A)$ — множество отображений из S в A, то $\mathcal{M}(S, A)$ является кольцом относительно естественных операций.

✓**Упражнение 1.1.** Пусть m — целое число. Докажите, что множество $\mathbb{Z}(\sqrt{m}) = \{a + b\sqrt{m}\}, a, b \in \mathbb{Z}$ является кольцом относительно естественных операций сложения и умножения. Аналогично, множество $\mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \{a + b\sqrt{m}\}, a, b \in \mathbb{Q}$ является полем.

✓**Задача 1.2.** Пусть $m > 1$ — натуральное число, и пусть $A = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ — множество вычетов по модулю m (т. е. остатков при делении на m), с операциями сложения и умножения, индуцированными аналогичными операциями в кольце целых чисел. Докажите, что A — кольцо. При каких m кольцо A является полем?

✓**Упражнение 1.3.** Докажите, что для любого элемента $a \in A$ кольца A выполнено равенство $0 \cdot a = 0$. В частности, если кольцо A содержит хотя бы два различных элемента, то $0 \neq 1$.

✓**Упражнение 1.4.** Докажите, что в кольце A нуль (см. аксиому **(AZ)**) и единица (см. аксиому **(AU)**) определены однозначно.

√**Упражнение 1.5.**

а) Докажите, что для произвольного элемента a кольца A противоположный элемент $-a$ (см. аксиому **(AI)**) определён однозначно.

б) Докажите, что для произвольного элемента $a \neq 0$ поля K обратный элемент a^{-1} (см. аксиому **(MI)**) определён однозначно.

√**Упражнение 1.6.** Докажите, что для произвольного элемента a кольца A выполнены равенства $-a = -1 \cdot a$, $-a \cdot -b = a \cdot b$, $(-a)^{-1} = a^{-1}$.

√**Упражнение 1.7.**

а) Докажите, что в произвольном кольце A уравнение $x + a = b$ имеет единственное решение при всех $a, b \in A$, т.е. в кольце A существует вычитание. Решение $x = b + (-a)$ этого уравнения называется *разностью* элементов a и b и обозначается $b - a$.

б) Докажите, что в поле K уравнение $a \cdot x = b$ имеет единственное решение при всех $a, b \in K$, $a \neq 0$, т.е. в поле K существует деление. Решение $x = a^{-1} \cdot b$ этого уравнения называется *частным* и обозначается дробью $\frac{b}{a}$.

Определение 1.2. Пусть $\varphi\colon A \to B$ — отображение кольца A в кольцо B. Отображение φ называется *гомоморфизмом*, если для произвольных элементов $a, a' \in A$

$$\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a'), \qquad \varphi(a \cdot a') = \varphi(a) \cdot \varphi(a').$$

Определение 1.3. Пусть $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец. Множество элементов $a \in A$ таких, что $\varphi(a) = 0$, называется *ядром* гомоморфизма φ и обозначается $\operatorname{Ker}\varphi$. Множество элементов $b \in B$ таких, что $b = \varphi(a)$ для некоторого $a \in A$ называется *образом* гомоморфизма φ и обозначается $\operatorname{Im}\varphi$.

Если $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, то гомоморфизм φ называется *мономорфизмом.*

Если $\operatorname{Im}\varphi = B$, то гомоморфизм φ называется *эпиморфизмом.*

Наконец, если $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ и $\operatorname{Im}\varphi = B$, то $\varphi\colon A \to B$ называется *изоморфизмом.*

√**Упражнение 1.8.** Проверьте, что если φ — изоморфизм, то φ^{-1} также является изоморфизмом.

Определение 1.4. Если A и B — кольца, $B \subset A$, и операции сложения и умножения в B индуцированы соответствующими операциями в A, то B называется *подкольцом* A, а A — *B-алгеброй.*

Аналогично, если $K \subset L$ — поля, а операции сложения и умножения в K индуцированы соответствующими операциями в L, то K называется *подполем* L, а $L \supset K$ называется *расширением полей.*

√**Задача 1.9.** Пусть $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм. Являются ли $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$ подкольцами колец A и B соответственно?

√**Упражнение 1.10.** Проверьте, что если K — поле, то всякий гомоморфизм $K \to B$ является мономорфизмом.

√**Задача 1.11.** Пусть n — натуральное число, и пусть $\varphi_n\colon A[T] \to A$ — отображение, сопоставляющее многочлену $\sum_i a_i T^i$ коэффициент a_n. При каких n отображение φ_n является гомоморфизмом? Каковы его ядро и образ?

Задача 1.12. Пусть K — поле, $B = K[T]$, $A = K[T, T^{-1}]$ — множество многочленов Лорана, т.е. $A = \left\{ \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} \lambda_i T^i \right\}$, где $\lambda_i \in K$ и лишь конечное число λ_i отлично от нуля. Проверьте, что A — подкольцо кольца рациональных функций $K(T)$, а B — подкольцо A. Существуют ли гомоморфизмы $A \to B$, эпиморфизмы $B \to A$?

√**Задача 1.13.** Пусть $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец. Докажите, что $\operatorname{Ker}\varphi$ обладает следующими свойствами:

(1) Если $a \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $-a \in \operatorname{Ker}\varphi$. Другими словами, $\operatorname{Ker}\varphi = -\operatorname{Ker}\varphi$.
(2) Если $a, a' \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $a + a' \in \operatorname{Ker}\varphi$. Другими словами, $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi$.
(3) Если $a \in A$, $a' \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $a \cdot a' \in \operatorname{Ker}\varphi$. Другими словами, $A \cdot \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi$.

Определение 1.5. Подмножество $\mathfrak{a} \subset A$ кольца A, обладающее свойствами (1)–(3) из задачи 1.13, называется *идеалом* кольца A (происхождение термина «идеал» станет ясно позднее). Таким образом, задача 1.13 означает, что ядра гомоморфизмов являются идеалами.

Пример. Пусть S — множество (соотв. топологическое пространство), пусть $F(S)$ (соотв. $C(S)$) — множество всех вещественнозначных функций (соотв. непрерывных функций) на S, и пусть $R \subset S$ — произвольное (соотв. замкнутое) подмножество. Докажите, что $F(S)$ (соотв. $C(S)$) — кольцо относительно обычных операций сложения и умножения функций, а подмножество функций (соотв. непрерывных функций), обращающихся в нуль на R, является идеалом в этом кольце.

Определение 1.6. Идеал $\mathfrak{a} \subset A$ называется *главным*, если $\mathfrak{a} = A \cdot a$ для некоторого элемента $a \in \mathfrak{a}$. В этом случае случае a называют *образующей* идеала $\mathfrak{a}$ и пишут $\mathfrak{a} = (a)$). Кольцо A, в котором все идеалы главные, называется *кольцом главных идеалов*.

Общее, если $\mathfrak{a} = A \cdot a_1 + \cdots + A \cdot a_r$ для некоторых элементов $a_1, \cdots, a_r \in \mathfrak{a}$, то говорят, что *идеал* $\mathfrak{a}$ *порождён элементами* $a_1, \cdots, a_r$, которые называются его *образующими*.

Задача 1.14. Пусть m — натуральное число, а K — поле. Являются ли кольцами главных идеалов следующие кольца: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$, $K[T]$, $K[T, T^{-1}]$, $\mathbb{Z}[T]$, $K[T_1, T_2]$ (здесь и далее $K[T_1, T_2]$ — кольцо многочленов от двух переменных; докажите, что $K[T_1, T_2] = K[T_1][T_2] = K[T_2][T_1]$), $F(S)$, $C(S)$?

√**Задача-определение 1.15.** Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ — идеалы кольца A.

(1) Докажите, что $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{a + b\}, a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}$ — идеал в кольце A. Этот идеал называется *суммой* идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.
(2) Докажите, что $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \{\sum_i a_i \cdot b_i\}, a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b}$ — идеал в кольце A. Этот идеал называется *произведением* идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.
(3) Докажите, что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ — идеал в кольце A. Этот идеал называется *пересечением* идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

Упражнение 1.16. Объясните (на примере), почему в 1.15 (2) необходимо суммирование по i.

Упражнение 1.17. Исследуйте, как выглядят три операции, введённые в задаче 1.15, в известных вам примерах колец (см., например, задачу 1.14).

Упражнение 1.18. Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ — идеалы кольца A. Докажите, что $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Приведите примеры, показывающие, что включение может быть как строгим, так и нестрогим.

Задача 1.13 показывает, что ядро произвольного гомоморфизма является идеалом. Справедливо и обратное утверждение. Чтобы лучше разобраться в ситуации, введём общематематическое понятие отношения эквивалентности.

Определение 1.7. Пусть X — множество, для некоторых пар элементов (x, x') которого задано отношение xRx'. Отношение R называется *отношением эквивалентности* и обозначается $x \sim x'$, если для всех $x, x', x'' \in X$ выполнены следующие условия:

1) $x \sim x$ (рефлексивность);
2) если $x \sim x'$, то и $x' \sim x$ (симметричность);
3) если $x \sim x'$ и $x' \sim x''$, то $x \sim x''$ (транзитивность).

Множество $\bar{x} = \{x' \in X \mid x' \sim x\}$ называется *классом эквивалентности*, содержащим x.

✓Задача 1.19. Докажите, что всякое отношение эквивалентности $\sim$ на X, удовлетворяющее условиям 1)–3) определения 1.7, порождает сюръективное отображение $f\colon X \to Y$, $x \mapsto \bar{x}$ (сюръективность означает, что $f(X) = Y$), в множество классов эквивалентности, причём $x \sim x'$ если и только если $f(x) = f(x')$. Обратно, всякое сюръективное отображение $f\colon X \to Y$ порождает отношение эквивалентности $x \sim x'$ если и только если $f(x) = f(x')$, причём это отношение удовлетворяет условиям определения 1.7. Отметим, что прообраз точки $y \in Y$ называется *слоем* над y. Таким образом, слои отображения f — это в точности классы эквивалентности точек X.

Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в кольце A. Введём отношение эквивалентности на A, полагая $a \sim a'$, если $a - a' \in \mathfrak{a}$.

✓Упражнение 1.20. Проверьте, что определённое выше отношение удовлетворяет условиям 1)–3) определения 1.7.

Обозначим через $A/\mathfrak{a}$ множество классов эквивалентности, и определим на $A/\mathfrak{a}$ естественным образом операции сложения и умножения, а также 0 и 1 (например, если $x, y \in A$ — два элемента, а $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — их классы эквивалентности по модулю идеала $\mathfrak{a}$, то их произведение определяется как класс эквивалентности элемента $x \cdot y$, т.е. $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}$).

✓Упражнение-определение 1.21. Докажите, что введённые выше операции сложения и умножения определены корректно, т.е. не зависят от выбора элементов в классах эквивалентности, и относительно этих операций множество $A/\mathfrak{a}$ является кольцом, которое называется *факторкольцом кольца A по идеалу $\mathfrak{a}$*.

Согласно задаче 1.19, отображение $A \to A/\mathfrak{a}$, сопоставляющее каждому элементу кольца A его класс эквивалентности, является эпиморфизмом.

√**Задача 1.22.** Пусть $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал, пусть $\pi\colon A \to A/\mathfrak{a}$ — канонический гомоморфизм, и пусть $\varphi\colon A \to B$ — такой гомоморфизм, что $\operatorname{Ker}\varphi \supset \mathfrak{a}$. Докажите, что существует единственный гомоморфизм $\psi\colon A/\mathfrak{a} \to B$ такой, что $\varphi = \psi \circ \pi$, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\ & A/\mathfrak{a} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Другими словами, эпиморфизм $A \to A/\mathfrak{a}$ обладает *универсальным свойством.*

Определение 1.8. Кольцо A называется *областью целостности*, если A не имеет делителей нуля, т.е. если $a \cdot a' = 0$, $a, a' \in A$, то либо $a = 0$ либо $a' = 0$.

Ясно, что если A является подкольцом некоторого поля K, то A является областью целостности. Справедливо и обратное утверждение.

√**Задача-определение 1.23.** Пусть A — область целостности. На множестве пар (a, b), $a, b \in A$, $b \neq 0$ рассмотрим отношение $(a, b) \sim (c, d)$ если и только если $ad - bc = 0$. Докажите, что $\sim$ — отношение эквивалентности. Проверьте, что операции $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$ и $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$ индуцируют операции на множестве классов эквивалентности $K = K(A)$, относительно которых K является полем. Пусть $i\colon A \to K$ — мономорфизм, индуцированный отображением $a \mapsto (a, 1)$. Докажите, что для каждого мономорфизма $\varphi\colon A \to L$ кольца A в поле L существует единственный мономорфизм поля K в поле L, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ K \arrow[rr] & & L \end{tikzcd}$$

Таким образом, мономорфизм $i\colon A \to K$ обладает универсальным свойством. Поле K называется *полем частных* области целостности A.

√**Задача 1.24.** Какие из колец, перечисленных в задаче 1.14, обладают полями частных? Найдите эти поля.

Пусть A — кольцо. Рассмотрим гомоморфизм $\lambda\colon \mathbb{Z} \to A$, для которого $\lambda(1) = 1$ (здесь 1 — единица кольца A; легко видеть, что всякий гомоморфизм кольца $\mathbb{Z}$ определяется образом единицы). Поскольку вы решили задачу 1.14, вы знаете, что $\mathbb{Z}$ — кольцо главных идеалов. Поэтому $\operatorname{Ker}\lambda = m\mathbb{Z}$, где $m \geq 0$ — целое число.

Определение 1.9. Число m называется *характеристикой* кольца A и обозначается $\operatorname{char} A$.

Таким образом, всякое кольцо содержит подкольцо вида $\mathbb{Z}/(\operatorname{char} A) \cdot \mathbb{Z}$.

√**Упражнение 1.25.** Проверьте, что если кольцо A не имеет делителей нуля (например, A — поле), то либо $\operatorname{char} A = 0$, либо $\operatorname{char} A$ — простое число. При этом $\operatorname{char} A = \operatorname{char} K(A)$.