Независимый Московский Университет

Алгебра – II

Второй курс, осенний семестр 1999/2000 г.
Лекции 10,11

Пространства матричных элементов.

Определение 1. *Пространством матричных элементов* представления ρ группы G называется подпространство пространства $\mathbb{C}[G]$, порожденное матричными элементами $a_{ij}(g)$ операторов представления $\rho(g)$ (в некотором базисе пространства представления).

Ясно, что пространство матричных элементов представления не зависит от выбора базиса в пространстве этого представления.

Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_k$ — все различные неприводимые представления группы G размерностей $n_1, \ldots, n_k$. Будем воспринимать их как *матричные представления*, то есть выберем в пространстве каждого из представлений базис и будем записывать операторы представлений матрицами в соответствующем базисе. Из полупростоты групповой алгебры следует, что представление $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$ задает изоморфизм $\mathbb{C}G$ с алгеброй $M_{n_1,\ldots,n_k}(\mathbb{C})$ блочно-диагональных матриц размера $(n_1 + \cdots + n_k) \times (n_1 + \cdots + n_k)$ с диагональными блоками размеров $n_1 \times n_1, \ldots, n_k \times n_k$ (алгебра $M_{n_1,\ldots,n_k}(\mathbb{C})$ естественно отождествляется с алгеброй $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$).

Отождествим алгебру $\mathbb{C}G$ с алгеброй $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}))$ посредством изоморфизма $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$. Пусть ρ — произвольное представление группы G. Разложим его в сумму неприводимых: $\rho = \sum c_r \rho_r$. Легко видеть, что пространство матричных элементов представления ρ — аннулятор в $(M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}))^*$ суммы тех M_{n_r}, для которых $c_r = 0$. В частности, пространство матричных элементов представления ρ_r естественно изоморфно пространству $M_{n_r}^*$. Поэтому при изоморфизме $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}) \simeq (M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}))^*$, задаваемом формой $(a, b) = \operatorname{tr} L(a)L(b)$, слагаемое M_{n_r} соответствует пространству матричных элементов представления ρ_r. Нетрудно проверить, что матричному элементу $a_{ij}^{(r)}(\cdot)$ в представлении ρ_r отвечает матричная единица $E_{ji}^{(r)}$ слагаемого M_{n_r}, деленная на n_r. Поскольку, очевидно, $(E_{ji}^{(r)}, E_{j'i'}^{(r')}) = n_r \delta_{rr'} \delta_{ij'} \delta_{ji'}$, то мы получаем следующие значения билинейной формы $(\ ,\ )$ на матричных элементах:

$$(a_{ij}^{(r)}, a_{i'j'}^{(r')}) = n_r^{-1} \delta_{rr'} \delta_{ij'} \delta_{ji'}.$$

Пусть теперь в пространстве каждого из представлений ρ_r выбран *ортонормированный* базис относительно инвариантной эрмитовой формы. Тогда для матричных элементов в этих базисах выполнено равенство $a_{ij}^{(r)}(g^{-1}) = \overline{a_{ji}^{(r)}(g)}$.

Поэтому мы получаем следующее *соотношение ортогональности для матричных элементов*:
$$\langle a_{ij}^{(r)}, a_{i'j'}^{(r')}\rangle = n_r^{-1}\delta_{rr'}\delta_{ii'}\delta_{jj'}.$$
Таким образом, матричные элементы неприводимых представлений составляют ортогональный базис пространства $\mathbb{C}[G]$ функций на группе G.

Отметим, наконец, что этот базис задает явное разложение $\mathbb{C}[G]$ в сумму минимальных инвариантных подпространств как относительно левого, так и относительно правого регулярного представления.

Операции над представлениями. Для получения достаточного количества представлений нужно уметь строить новые представления из старых.

Определение 2. Пусть G — группа, а $\rho : G \to GL(V)$ и $\tau : G \to GL(W)$ — ее линейные представления. Определим отображения $\rho^* : G \to GL(V)^*$, $\rho \oplus \tau : G \to GL(V \oplus W)$ и $\rho \otimes \tau : G \to GL(V \otimes W)$ следующими формулами: $\rho^*(g) = \big((\rho(g))^*\big)^{-1}$, $(\rho\oplus\tau)(g) = \rho(g)\oplus\tau(g)$ и $(\rho\otimes\tau)(g) = \rho(g)\otimes\tau(g)$. Ясно, что отображения ρ^*, $\rho\oplus\tau$ и $\rho\otimes\tau$ являются линейными представлениями. Они называются *двойственным представлением* к ρ, *прямой суммой* представлений ρ и τ и *тензорным произведением* представлений ρ и τ, соответственно.

Аналогично определяются k*-я симметрическая степень* $S^k\rho : G \to GL(S^kV)$ и k*-я внешняя степень* $\Lambda^k\rho : G \to GL(\Lambda^kV)$ представления ρ.

Пусть $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм групп, и ρ — представление группы H в пространстве V. Тогда $\rho\circ\varphi$ — представление группы G в том же пространстве. Рассмотрим некоторые частные случаи этой конструкции.

1) Пусть G — подгруппа группы H и φ — вложение. Тогда $\rho\circ\varphi$ — *ограничение представления* ρ *на подгруппу группы* H.
2) Пусть $G = H$ и φ — автоморфизм. Тогда $\rho\circ\varphi$ — представление той же группы, что и ρ. Говорят, что оно получается *подкручиванием* представления ρ на автоморфизм φ. Таким образом, получается (правое) действие группы $\mathrm{Aut}(G)$ на множестве классов изоморфизма представлений группы G.
3) Пусть $N \lhd G$, $H = G/N$ и φ — каноническая проекция. Тогда представление $\rho\circ\varphi$ называется *поднятием* представления ρ. Представление $\rho\circ\varphi$ обладает тем свойством, что подгруппа N содержится в его ядре. Легко видеть, что и наоборот, всякое представление группы G, ядро которого содержит N, представляется в виде $\rho\circ\varphi$ для некоторого представления ρ группы H, то есть *факторизуется* через представление факторгруппы.

   Например, коммутант G' группы G, очевидно, содержится в ядре каждого одномерного представления этой группы. Поэтому классы изоморфизма одномерных представлений группы G находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами изоморфизма неприводимых представлений *абелианизации* G/G' группы G.

Регулярные и квазирегулярные представления конечной группы.

Определение 3. Для конечной группы G рассмотрим линейное пространство $\Bbbk G$ всех формальных линейных комбинаций элементов группы. На базисе пространства $\Bbbk G$ определено ассоциативное умножение (групповая операция); распространяя её по дистрибутивности на всё пространство $\Bbbk G$, получаем на нём структуру ассоциативной алгебры с единицей. Эта алгебра называется *групповой алгеброй* группы G.

Представление конечной группы и ее групповой алгебры — это, в некотором смысле, одно и то же. А именно, пусть ρ — представление конечной группы G в пространстве V. Для каждого элемента $\sum \lambda_g g \in \Bbbk G$ положим $\tau(\sum \lambda_g g) = \sum \lambda_g \rho(g)$. Ясно, что таким образом получается представление групповой алгебры в том же пространстве V. Наоборот, если у нас есть представление τ групповой алгебры $\Bbbk G$ в пространстве V, то представление ρ группы G получается ограничением τ на $G \subset \Bbbk G$.

Определение 4. *Левым регулярным представлением* группы G называется ее представление в пространстве $\Bbbk G$, где каждый элемент $g \in G$ представлен оператором левого умножения на g в алгебре $\Bbbk G$. *Правым регулярным представлением* группы G называется ее представление в пространстве $\Bbbk G$, где каждый элемент $g \in G$ представлен оператором правого умножения на g^{-1} в алгебре $\Bbbk G$.

Теорема 1. *Каждое неприводимое представление $\rho : G \to GL(V)$ группы G изоморфно факторпредставлению ее левого регулярного представления.*

Доказательство. Обозначим левое регулярное представление группы G через λ. Пусть $v \in V$ — ненулевой вектор. Рассмотрим линейное отображение $\varphi : \Bbbk G \to V$, переводящее каждый базисный вектор $g \in G \subset \Bbbk G$ в $\rho(g)v$. Легко проверить, что это отображение является морфизмом представления λ в представление ρ. Так как $\varphi \neq 0$, то $\varphi(\Bbbk G) = V$, так что $\rho \simeq \lambda_{\Bbbk G/W}$, где $W = \ker \varphi$. ☐

В частности, любое комплексное неприводимое представление группы G входит в разложение левого регулярного представления этой группы (то есть соответствующая изотипическая компонента не равна нулю).

Определение 5. Пусть X — множество, на котором группа G действует слева. Рассмотрим пространство $\Bbbk X$, базисом которого является множество X. Определим представление λ_X группы G в пространстве $\Bbbk X$ формулой $\lambda_X(g) \sum a_x x = \sum a_x gx$. Такое представление называется *квазирегулярным.*

Ясно, что представление λ_X распадается в сумму подпредставлений, отвечающих разным орбитам действия группы G на X.

Теорема 2. *Пусть X и Y — однородные G-пространства, то есть группа G действует на множествах X и Y транзитивно. Выберем по элементу из* *этих множеств $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ и положим $H = G_{x_0}$, $K = G_{y_0}$ (стабилизаторы точек x_0 и y_0). Тогда число сплетения $c(\lambda_X, \lambda_Y)$ равно числу двойных смежных классов, то есть различных множеств вида HgK, где $g \in G$.*

Доказательство. Пусть $\varphi : \Bbbk X \to \Bbbk Y$ — сплетающий оператор и пусть $\varphi(x_0) = \sum\limits_{y \in Y} b_y y$. Тогда для любого $h \in H$ мы имеем

$$\sum_{y \in Y} b_y y = \varphi(x_0) = \varphi(hx_0) = \lambda_Y(h)\varphi(x_0) = \sum_{y \in Y} b_y hy.$$

Отсюда мы получаем, что $b_y = b_{hy}$ для любых $h \in H$ и $y \in Y$, то есть что коэффициенты b_y постоянны на H-орбитах во множестве Y. При этом набором коэффициентов b_y оператор φ определяется однозначно: $\varphi(gx_0) = \sum\limits_{y \in Y} b_y gy$.

Пусть теперь $f : Y \to \Bbbk$ — произвольная функция, постоянная на H-орбитах. Выберем для каждого $x \in X$ элемент $g_x \in G$ такой, что $x = g_x x_0$, и положим $\psi(x) = \sum\limits_{y \in Y} f(y) g_x y$. Из того, что функция f постоянна на H-орбитах, следует, что это определение корректно. Продолжим ψ по линейности до оператора $\Bbbk X \to \Bbbk Y$. Очевидно, что это сплетающий оператор. Поэтому $c(\lambda_X, \lambda_Y)$ равно числу H-орбит в Y.

Но $Y \simeq G/K$ как множество с действием группы G, а смежные классы $g_1 K$ и $g_2 K$ лежат в одной H-орбите тогда и только тогда, когда $Hg_1K = Hg_2K$. Поэтому $c(\lambda_X, \lambda_Y) = \#(H \backslash G/K)$. □

Следующие два примера взяты из книги А. А. Кириллова «Элементы теории представлений».

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу:

> В математическом институте лежала модель куба. Один из сотрудников занумеровал грани куба числами $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Другой, придя в институт на следующий день, заменил каждое число на среднее арифметическое соседних чисел. Первый, заметив это, на другой день ответил тем же. Какие числа окажутся на гранях куба через месяц, если известно, что оба сотудника ходят в институт через день?

Решение этой шуточной задачи является моделью применения теории представлений к различным задачам математики, механики и физики, обладающим той или иной симметрией.

Обозначим через $V_\text{г}$ пространство комплекснозначных функций на множестве граней куба. Это пространство мы можем отождествить с пространством $\mathbb{C}X_\text{г}$, где $X_\text{г}$ — множество граней куба. Множество $X_\text{г}$ является однородным G-пространством, где G — группа вращений куба (изоморфная S_4), поэтому в пространстве $V_\text{г}$ определено квазирегулярное представление $\lambda_\text{г}$ группы G.

Легко видеть, что число сплетения $c(\lambda_\text{г}, \lambda_\text{г})$ равно сумме квадратов кратностей вхождения в $\lambda_\text{г}$ неизоморфных неприводимых представлений группы G.

С другой стороны, число сплетения $c(\lambda_{\text{г}}, \lambda_{\text{г}})$ равно числу орбит стабилизатора выбранной грани куба на множестве $X_{\text{г}}$. Таких орбит, очевидно, три: выбранная грань, смежные с ней грани и противоположная грань. Отсюда вытекает, что ни у какого неприводимого представления группы G кратность его вхождения в $\lambda_{\text{г}}$ не превосходит 1, и что $V_{\text{г}}$ является суммой трех изотипических компонент (являющихся минимальными инвариантными подпространствами).

Однако разложение $V_{\text{г}}$ в прямую сумму трех инвариантных подпространств легко указать. Пусть V_1 — пространство постоянных функций. Ясно, что это инвариантное подпространство. Эрмитово скалярное произведение на $V_{\text{г}}$, для которого грани образуют ортонормированный базис, является, очевидно, инвариантным. Поэтому $V_1^{\perp}$ — пространство функций с нулевой суммой значений — тоже инвариантное подпространство. Назовем функцию на множестве граней куба четной, если она принимает на противоположных гранях одинаковые значения, и нечетной, если она принимает на противоположных гранях противоположные значения. Пространства V_e, состоящее из всех четных функций, и V_o, состоящее из всех нечетных функций, тоже являются инвариантными подпространствами. Пусть $V_2 = V_e \cap V_1^{\perp}$ (пространство четных функций с нулевой суммой значений) и $V_3 = V_o$. Ясно, что эти подпространства инвариантны и $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. Поэтому подпредставления представления $\lambda_{\text{г}}$ в подпространствах V_1, V_2 и V_3 неприводимы. Обозначим их через ρ_1, ρ_2 и ρ_3 соответственно.

Рассмотрим оператор L в пространстве $V_{\text{г}}$, переводящий функцию $f(x)$ в $(Lf)(x) = \frac{1}{4}\sum f(y)$, где суммирование ведется по четырем граням y, соседним с гранью x. Ясно, что оператор L перестановочен с действием группы G. Поэтому ограничение оператора L на каждое из подпространств V_i сводится к умножению на константу a_i.

Очевидно, что $a_1 = 1$. В качестве представителя пространства V_2 можно взять функцию, равную 1 на одной паре противоположных граней, -1 на другой и 0 на третьей. Отсюда вытекает, что $a_2 = -1/2$. Наконец, в качестве представителя пространства V_3 можно взять функцию, равную 1 на одной грани, -1 на противоположной грани и 0 на остальных. Отсюда $a_3 = 0$.

Пусть f — исходная функция (принимающая значения $1, 2, 3, 4, 5, 6$ на разных гранях). То, что будет написано на гранях куба через месяц, имеет вид $L^{30}f = a_1^{30}\pi_1(f) + a_2^{30}\pi_2(f) + a_3^{30}\pi_3(f) = 3,5 + \pi_2(f)/2^{30}$, где через π_i обозначен оператор проекции на V_i. Поскольку проекция f на V_2 имеет длину не больше, чем $\|f - \pi_1(f)\| = \sqrt{17,5}$, мы получаем, что на каждой грани куба через месяц будет написано число, отличающееся от $3,5$ не более, чем на $\sqrt{17,5}/2^{30} \approx 0,000000004$.

Пример 2. Рассматривая другие однородные пространства для группы куба, можно построить полную систему ее неприводимых представлений. Пусть

$X_{\text{г}}$ — множество граней куба;

$X_{\text{в}}$ — множество вершин куба;

$X_{\text{д}}$ — множество больших диагоналей куба;

$X_{\text{т}}$ — множество правильных тетраэдров с вершинами в вершинах куба;

$X_{\text{ц}}$ — множество центров куба.

Пространства функций на этих множествах мы обозначим через $V_{\text{г}}$, $V_{\text{в}}$, $V_{\text{д}}$, $V_{\text{т}}$, $V_{\text{ц}}$. Их размерности равны 6, 8, 4, 2, 1 соответственно. Числа сплетения между соответствующими квазирегулярными представлениями легко найти (так же, как мы нашли $c(\lambda_{\text{г}}, \lambda_{\text{г}})$). Они сведены в следующую таблицу:

	$\lambda_{\text{г}}$	$\lambda_{\text{в}}$	$\lambda_{\text{д}}$	$\lambda_{\text{т}}$	$\lambda_{\text{ц}}$
$\lambda_{\text{г}}$	3	2	1	1	1
$\lambda_{\text{в}}$	2	4	2	2	1
$\lambda_{\text{д}}$	1	2	2	1	1
$\lambda_{\text{т}}$	1	2	1	2	1
$\lambda_{\text{ц}}$	1	1	1	1	1

Посмотрим, какие выводы можно сделать из этой таблицы. Прежде всего, из вида диагональных чисел следует, что $\lambda_{\text{ц}}$ — неприводимое представление (это, впрочем, ясно уже из того, что пространство $V_{\text{ц}}$ одномерно), $\lambda_{\text{д}}$ и $\lambda_{\text{т}}$ являются суммами двух неизоморфных неприводимых представлений, $\lambda_{\text{г}}$ — трех неизоморфных неприводимых представлений, а для $\lambda_{\text{в}}$ есть две возможности — либо сумма двух изоморфных неприводимых представлений, либо сумма четырех неизоморфных неприводимых представлений. Первая из этих возможностей отпадает, так как в этом случае $c(\lambda_{\text{в}}, \lambda_{\text{ц}})$ не могло бы равняться 1.

Далее из таблицы следует, что $\lambda_{\text{ц}}$ входит в остальные модули с кратностью 1. Мы уже видели, что $\lambda_{\text{г}}$ является суммой своих подпредставлений $\rho_1 \simeq \lambda_{\text{ц}}$, ρ_2 и ρ_3. Продолжая эти рассуждения, легко получаем, что имеют место изоморфизмы

$$\begin{aligned}
\lambda_{\text{г}} &\simeq \rho_1 + \rho_2 + \rho_3, \\
\lambda_{\text{в}} &\simeq \rho_1 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5, \\
\lambda_{\text{д}} &\simeq \rho_1 + \rho_4, \\
\lambda_{\text{т}} &\simeq \rho_1 + \rho_5, \\
\lambda_{\text{ц}} &\simeq \rho_1,
\end{aligned}$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5 — попарно неизоморфные неприводимые представления группы G размерностей 1, 2, 3, 3 и 1 соответственно. Размерности представлений находятся из системы уравнений

$$\dim \lambda_{\text{г}} = \dim \rho_1 + \dim \rho_2 + \dim \rho_3, \tag{1}$$

$$\dim \lambda_{\text{в}} = \dim \rho_1 + \dim \rho_3 + \dim \rho_4 + \dim \rho_5, \tag{2}$$

$$\dim \lambda_{\text{д}} = \dim \rho_1 + \dim \rho_4, \tag{3}$$

$$\dim \lambda_{\text{т}} = \dim \rho_1 + \dim \rho_5, \tag{4}$$

$$\dim \lambda_{\text{ц}} = \dim \rho_1. \tag{5}$$

Отметим, что для любого квазирегулярного представления λ_X имеет место равенство $c(\lambda_X, \lambda) = c(\lambda, \lambda_X) = |X| = \dim \lambda_X$, где λ — левое регулярное представление группы G. Поскольку $c(\sum \rho_i, \lambda) = \sum c(\rho_i, \lambda)$, когда ρ_i — неизоморфные неприводимые представления, то $c(\rho_i, \lambda)$ удовлетворяют той же системе уравнений 1, что и $\dim \rho_i$. Поэтому $c(\rho_i, \lambda) = \dim \rho_i$ для любого $i = 1, \ldots, 5$, то есть каждое из этих неприводимых представлений входит в левое регулярное представление с той же кратностью, какова его размерность. Следовательно, сумма соответствующих изотипических компонент левого регулярного представления имеет размерность $\sum\limits_{i=1}^{5} (\dim \rho_i)^2$. Так как $\sum\limits_{i=1}^{5} (\dim \rho_i)^2 = 24 = |G| = \dim \lambda$, то в λ не входит больше никакое неприводимое представление группы G. Поэтому $\rho_1, \ldots, \rho_5$ — все неприводимые представления группы G (с точностью до изоморфизма).

Индуцированные модули и представления.

Определение 6. Пусть G — группа, H — её подгруппа, V — левый $\mathbb{C}H$-модуль, а $\rho : H \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}} V$ — соответствующее линейное представление. Групповую алгебру $\mathbb{C}G$ можно рассматривать как левый $\mathbb{C}H$-модуль. Положим $W = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}H}(\mathbb{C}G, V)$. Иначе пространство W можно описать как множество всех функций на группе G со значениями в пространстве V, удовлетворяющих условиям $F(hg) = \rho(h)F(g)$ для любых $g \in G$ и $h \in H$.

Введем в W структуру левого $\mathbb{C}G$-модуля, положив $(gF)(g') = F(g'g)$. Этот $\mathbb{C}G$-модуль называется *индуцированным модулем* и обозначается через $\operatorname{Ind}_H^G V$. Соответствующее линейное представление группы G называется *индуцированным представлением* и обозначается через $\operatorname{Ind}_H^G \rho$.

Упражнение 1. Доказать, что для любых $\mathbb{C}H$-модулей V и W имеет место G-изоморфизм $\operatorname{Ind}_H^G(V \oplus W) \cong \operatorname{Ind}_H^G V \oplus \operatorname{Ind}_H^G W$.

Упражнение 2. Доказать, что если H и K — подгруппы группы G, причем $K \subseteq H$, то для любого $\mathbb{C}K$-модуля V имеет место G-изоморфизм $\operatorname{Ind}_K^G V \cong \operatorname{Ind}_H^G \operatorname{Ind}_K^H V$.

Пример 3. Пусть $V = \mathbb{C}$ и ρ — тривиальное представление группы H. Тогда $\operatorname{Ind}_H^G V$ — это подпространство пространства $\mathbb{C}[G]$ функций на группе G, состоящее из всех функций, постоянных на каждом правом смежном классе группы G по подгруппе H. Поэтому $\operatorname{Ind}_H^G V$ можно отождествить с пространством $\mathbb{C}[H\backslash G]$ всех функций на множестве $H\backslash G$ правых смежных классов G по H.

Фактормножество $H\backslash G$ является однородным правым G-пространством (то есть множеством с транзитивным правым действием группы G), причем каждое однородное правое G-пространство изоморфно $H\backslash G$ при подходящем выборе подгруппы H (а именно, нужно взять в качестве H стабилизатор какой-нибудь точки). Представление группы G в пространстве функций на однородном правом G-пространстве $H\backslash G$ естественно изоморфно *квазирегулярному представлению* в пространстве $\mathbb{C}X$, где $X = G/H$. Изоморфизм $\mathbb{C}X \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[H\backslash G]$ получается так: смежный класс gH переходит в функцию, равную единице на Hg^{-1} и нулю на остальных правых смежных классах.

Упражнение 3. Пусть X — однородное правое G-пространство. Доказать, что значение характера соответствующего квазирегулярного представления на элементе $g \in G$ равно числу неподвижных (относительно g) точек в X.

Заметим, что для любого $\mathbb{C}H$-модуля V пространство V-значных функций на $X = H\backslash G$ изоморфно индуцированному модулю $\operatorname{Ind}_H^G V$ (хотя и не канонически). Пусть для каждого смежного класса $x \in X$ выбран его представитель $g_x \in G$. Поставим в соответствие каждому элементу $F \in \operatorname{Ind}_H^G V$ (рассматриваемому как функция на группе G) функцию $f : X \to V$, заданную равенством $f(x) = F(g_x)$. Легко видеть, что это соответствие устанавливает изоморфизм пространства $\operatorname{Ind}_H^G V$ с пространством V-значных функций на X, действие группы G на котором задается формулой $(gf)(x) = g_x g g_{xg}^{-1} f(xg)$. Отсюда, в частности, следует, что $\dim \operatorname{Ind}_H^G V = [G : H] \dim V$.

Для вычисления числа сплетения с индуцированным представлением очень полезна следующая теорема.

Теорема 3 (Двойственность Фробениуса)**.** *Пусть G — группа, H — её подгруппа, U — левый $\mathbb{C}G$-модуль, а V — левый $\mathbb{C}H$-модуль. Обозначим U, рассматриваемый как $\mathbb{C}H$-модуль, через $\operatorname{Res}_G^H U$. Тогда имеет место канонический изоморфизм*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, \operatorname{Ind}_H^G V) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}H}(\operatorname{Res}_G^H U, V).$$

Доказательство. Пусть $\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, \operatorname{Ind}_H^G V)$. Построим отображение $\hat{\psi} : \operatorname{Res}_G^H U \to V$ по формуле $\hat{\psi}(u) = (\psi(u))(e)$, где через e обозначена единица группы G (элементы пространства $\operatorname{Ind}_H^G V$ мы воспринимаем как функции на группе G).

Пусть $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}H}(\operatorname{Res}_G^H U, V)$. Построим отображение $\check{\varphi} : U \to \operatorname{Ind}_H^G V$ по формуле $(\check{\varphi}(u))(g) = \varphi(gu)$.

Проверьте сами, что отображение $\psi \mapsto \hat{\psi}$ переводит $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, \operatorname{Ind}_H^G V)$ в $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}H}(\operatorname{Res}_G^H U, V)$, а отображение $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ переводит $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}H}(\operatorname{Res}_G^H U, V)$ в $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, \operatorname{Ind}_H^G V)$, а также то, что эти отображения являются взаимно обратными. □

Пример 4. Пусть $V = \operatorname{Ind}_H^G \mathbb{C}$, $W = \operatorname{Ind}_K^G \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ рассматривается как тривиальный $\mathbb{C}H$-модуль ($\mathbb{C}K$-модуль). Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}K}(V, \mathbb{C}) = \\ &= \{f : H\backslash G \to \mathbb{C} \mid (\forall h \in K)\ f(xh) = f(x)\} \cong \mathbb{C}[H\backslash G/K],\end{aligned}$$

где через $H\backslash G/K$ обозначено множество *двойных смежных классов*, то есть множеств вида HgK. Таким образом, мы снова получили формулу для числа сплетения квазирегулярных представлений.

Множество $H\backslash G/K$ естественно отождествляется с множеством орбит правого действия K на $H\backslash G$, с множеством орбит левого действия H на G/K, и с множеством орбит правого действия G на $(H\backslash G)\times(G/K)$, заданного формулой $(x,y)g=(xg,g^{-1}y)$. Последнее множество находится в биекции с множеством орбит естественного правого действия G на $(H\backslash G)\times(K\backslash G)$ (эта биекция возникает из биекции $Kg\mapsto g^{-1}K$ между $K\backslash G$ и G/K).

Таким образом, число сплетения между квазирегулярными представлениями, отвечающими однородным правым G-пространствам X и Y, равно числу орбит группы G на множестве $X\times Y$ (или числу орбит группы H на множестве Y, или числу орбит группы K на множестве X, где H — стабилизатор некоторого элемента множества X, а K — стабилизатор некоторого элемента множества Y). Более того, орбитам отвечает некоторый базис в пространстве сплетающих операторов (см. лекцию 6). Сейчас мы обобщим эту конструкцию для сплетающих операторов между произвольными индуцированными представлениями.

Пусть H,K — подгруппы группы G, V — некоторый левый $\mathbb{C}H$-модуль, а W — некоторый левый $\mathbb{C}K$-модуль. Пространство $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$ имеет естественную структуру левого $\mathbb{C}K$-модуля и правого $\mathbb{C}H$-модуля. Обозначим через $L_{VW}(G)$ пространство всех функций $F:G\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$, удовлетворяющих условию $F(kgh)=kF(g)h$ для любых $k\in K, g\in G, h\in H$.

Определим для каждого $F\in L_{VW}(G)$ следующее линейное отображение из $\mathrm{Ind}_H^G V$ в $\mathrm{Ind}_K^G W$:

$$\hat{F}f(g)=\frac{1}{|H|}\sum_{g_1\in G}F(g_1)f(g_1^{-1}g),$$

где $f:G\to V$ — произвольный элемент $\mathrm{Ind}_H^G V$. Ясно, что

$$\hat{F}f\in\mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}_H^G V,\mathrm{Ind}_K^G W).$$

Теорема 4. *Отображение $F\mapsto\hat{F}$ задает изоморфизм линейных пространств $L_{VW}(G)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}_H^G V,\mathrm{Ind}_K^G W)$.*

Доказательство. Для каждого $\mathcal{F}:\mathrm{Ind}_H^G V\to\mathrm{Ind}_K^G W$ положим

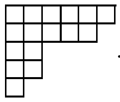
$$\check{\mathcal{F}}(g)v=\mathcal{F}(f_v)(g),$$

где $v\in V$, а $f_v\in\mathrm{Ind}_H^G V$ определено условием

$$f_v(g)=\begin{cases}gv, & \text{если } g\in H;\\ 0, & \text{если } g\notin H.\end{cases}$$

Проверьте сами, что $\check{\mathcal{F}}\in L_{VW}(G)$ и что отображения $F\mapsto\hat{F}$ и $\mathcal{F}\mapsto\check{\mathcal{F}}$ являются взаимно обратными. □

Представления симметрической группы. Пусть $G = S_n$ — группа перестановок. Напомню, что *разбиением* числа n называется неубывающая конечная последовательность $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ натуральных чисел, для которой $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. Для каждого разбиения λ числа n рассмотрим соответствующую *диаграмму Юнга*, по определению состоящую из n квадратов, размещенных в k строк длин $\lambda_1, \dots, \lambda_k$; строки нумеруются сверху вниз и выровнены по левому краю. Так, разбиению $(6, 5, 2, 2, 1)$ числа 16 отвечает диаграмма



.

Диаграмму Юнга мы будем обозначать той же буквой, что и соответствующее разбиение.

Таблицей Юнга формы λ называется диаграмма Юнга λ, все клеточки которой заполнены числами от 1 до n. Для каждой диаграммы Юнга λ выберем таблицу Юнга T_λ формы λ. Пусть $R_\lambda \subseteq G$ — подгруппа, состоящая из всех таких перестановок σ, что для любого $i = 1, \dots, n$ число $\sigma(i)$ стоит в той же строке диаграммы T_λ, что и i. Аналогично, обозначим через C_λ подгруппу группы G, состоящую из всех таких перестановок σ, что для любого $i = 1, \dots, n$ число $\sigma(i)$ стоит в том же столбце диаграммы T_λ, что и i. Рассмотрим тривиальный одномерный $\mathbb{C}R_\lambda$-модуль $\mathbb{C}_1$ и положим $U_\lambda = \mathrm{Ind}_{R_\lambda}^G \mathbb{C}_1$. Рассмотрим также одномерный $\mathbb{C}C_\lambda$-модуль $\mathbb{C}_\varepsilon$, в котором каждая перестановка из C_λ действует умножением на свой знак, и положим $W_\lambda = \mathrm{Ind}_{C_\lambda}^G \mathbb{C}_\varepsilon$.

Назовем *таблоидом* формы λ класс эквивалентности таблиц формы λ относительно перестановок чисел в строках таблицы (другими словами, таблоид — это разбиение множества $\{1, \dots, n\}$ на k подмножеств из $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ элементов). Таблоид, соответствующий таблице T, обозначим через $\overline{T}$. Множество таблоидов формы λ является однородным пространством над группой G. Обозначим его через X_λ. Ясно, что подгруппа R_λ — стабилизатор точки $\overline{T}_\lambda \in X_\lambda$. Поэтому $U_\lambda \simeq \mathbb{C}X_\lambda$ как $\mathbb{C}G$-модуль. Таким образом, с точностью до изоморфизма модуль U_λ не зависит от выбора таблицы T_λ. Далее мы будем отождествлять модуль U_λ с модулем $\mathbb{C}X_\lambda$.

Упражнение 4. Доказать, что с точностью до изоморфизма W_λ не зависит от выбора таблицы T_λ.

Пусть λ и μ — две диаграммы. Найдем необходимые условия для того, чтобы $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\mu) \neq 0$ (на самом деле эти условия окажутся и достаточными).

По теореме 4 пространство $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\mu)$ изоморфно пространству всех функций $F : G \to \mathbb{C}$, для которых верно тождество

$$F(\rho\sigma\tau) = \varepsilon(\rho)F(\sigma) \tag{6}$$

при $\rho \in C_\mu, \sigma \in G, \tau \in R_\lambda$. Из условия (6) следует, что F постоянна на левых смежных классах по подгруппе R_λ, то есть F можно рассматривать как функцию на $G/R_\lambda = X_\lambda$, удовлетворяющую условию $F(\rho\overline{T}) = \varepsilon(\rho)T$ для любых $\overline{T} \in X_\lambda, \rho \in C_\mu$. Но такая функция равна нулю для любого таблоида $\overline{T}$, у которого в одной строке есть два элемента одного столбца таблицы T_μ.

Предположим, что F не равна тождественно нулю, то есть найдется таблоид $\overline{T}$ формы λ, у которого в каждую строку попадает не более чем по одному элементу из каждого столбца таблицы T_μ.

Тогда, очевидно, выполнены следующие условия:

$$\begin{gathered}\lambda_1 \leqslant \mu_1,\\ \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \mu_1 + \mu_2,\\ \cdots\cdots\cdots\end{gathered}$$

В совокупности эти условия обозначаются так: $\lambda \leqslant \mu$. Легко видеть, что отношение $\leqslant$ задает на множестве n-клеточных диаграмм Юнга (или разбиений числа n) частичный порядок. Ясно, что этот порядок слабее лексикографического, то есть если $\lambda \leqslant \mu$, то $\lambda \underset{\text{lex}}{\leqslant} \mu$. В частности, если $\lambda \underset{\text{lex}}{\geqslant} \mu$, то $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\mu) = 0$.

Упражнение 5. Доказать, что если $\lambda \leqslant \mu$, то $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\mu) \neq 0$.

Теорема 5. $\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\lambda) = 1$.

Доказательство. Как мы уже убедились, пространство $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\lambda)$ изоморфно пространству таких функций F на X_λ, что $F(\rho\overline{T}) = \varepsilon(\rho)T$ для любых $\overline{T} \in X_\lambda, \rho \in C_\lambda$. Нетрудно убедиться, что если $\overline{T}$ — такой таблоид из X_λ, что в любой его строке не более чем по одному элементу из каждого столбца таблицы T_λ, то в каждой его строке ровно по одному элементу из каждого столбца таблицы T_λ, то есть $\overline{T} \in C_\lambda \overline{T}_\lambda$. Пусть F_0 — функция на X_λ, заданная формулой

$$F(\overline{T}) = \begin{cases} \varepsilon(\rho), & \text{если } \overline{T} = \rho\overline{T}_\lambda \text{ для некоторого } \rho \in C_\lambda;\\ 0, & \text{если } \overline{T} \in X_\lambda \setminus C_\lambda\overline{T}_\lambda. \end{cases}$$

Ясно, что функция F_0 определена корректно и любая функция F, удовлетворяющая нашим условиям, пропорциональна F_0. □

Следствие 5.1. *У $\mathbb{C}G$-модулей U_λ и W_λ существуют однозначно определеные изоморфные простые подмодули $V_\lambda \subseteq U_\lambda$ и $\tilde{V}_\lambda \subseteq W_\lambda$. Кроме того $V_\lambda \not\simeq V_\mu$ при $\lambda \neq \mu$.*

Доказательство. То, что изоморфные простые подмодули V_λ и $\tilde{V}_\lambda$ существуют и определены однозначно, следует из одномерности $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\lambda)$. Если $V_\lambda \simeq V_\mu$, то $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\mu) \neq 0$ и $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\mu, W_\lambda) \neq 0$. Но тогда $\lambda \leqslant \mu$ и $\mu \leqslant \lambda$, следовательно, $\lambda = \mu$. □

Следствие 5.2. *Любой простой $\mathbb{C}G$-модуль изоморфен одному из V_λ.*

Доказательство. Все V_λ попарно неизоморфны и число их равно числу разбиений числа n. Поскольку классов сопряженности в симметрической группе столько же (класс сопряженности определяется набором длин циклов, то есть разбиением числа n), то никаких других простых $\mathbb{C}G$-модулей не бывает. $\square$

Можно воспользоваться явным видом гомоморфизмов между U_λ и W_λ, чтобы получить линейные образующие пространств V_λ и $\tilde{V}_\lambda$. Например, ясно, что V_λ — образ любого ненулевого гомоморфизма $W_\lambda \to U_\lambda$. Каждый такой гомоморфизм отвечает, как мы знаем из теоремы 4, функции $F : G \to \mathbb{C}$, удовлетворяющей условию $F(\rho\sigma\tau) = F(\sigma)\varepsilon(\tau)$ для любых $\rho \in R_\lambda, \sigma \in G, \tau \in C_\lambda$. Возьмем в качестве такой функции $F(\sigma) = F_0(\sigma^{-1}R_\lambda$, где функция F_0 определена в доказательстве теоремы 5. Применяя гомоморфизм $\hat{F}$ к элементам W_λ, мы получаем следующий результат:

Утверждение 6. *Для каждой таблицы T формы λ рассмотрим элемент*

$$P(T) = \sum_{\sigma \in C(T)} \varepsilon(\sigma)\sigma\overline{T} \in \mathbb{C}X_\lambda = U_\lambda,$$

где $C(T)$ — подгруппа всех перестановок, сохраняющих столбцы таблицы T. Элементы $P(T)$ линейно порождают подпространство $V_\lambda \subseteq U_\lambda$.

Замечание. Ясно, что достаточно рассматривать $P(T)$ для таких таблиц T, у которых элементы каждого столбца возрастают сверху вниз. Оказывается, однако, что можно ограничиться $P(T)$ для таких таблиц T, у котрых ещё и элементы каждой строки возрастают слева направо. Такие таблицы называются *стандартными*. Элементы $P(T)$, для которых T — стандартная таблица, составляют базис пространства V_λ. Попробуйте доказать это сами.

Приведем ещё одну явную конструкцию $\mathbb{C}G$-модуля V_λ. Рассмотрим следующие элементы групповой алгебры $\mathbb{C}G$:

$$a_\lambda = \sum_{\sigma \in R_\lambda} \sigma; \qquad b_\lambda = \sum_{\sigma \in C_\lambda} \varepsilon(\sigma)\sigma; \qquad c_\lambda = b_\lambda \cdot a_\lambda; \qquad \tilde{c}_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda.$$

Легко видеть, что имеют место изоморфизмы $\mathbb{C}G$-модулей: $\mathbb{C}Ga_\lambda \simeq U_\lambda$ и $\mathbb{C}Gb_\lambda \simeq W_\lambda$. Кроме того, гомоморфизм $U_\lambda \to W_\lambda$, отвечающий функции $F_0(g)$ из доказательства теоремы 5, соответствует гомомрфизму $\mathbb{C}Ga_\lambda \to \mathbb{C}Gb_\lambda$, переводящему xa_λ в $xa_\lambda b_\lambda$. Аналогично, единственный (с точностью до пропорциональности) ненулевой гомоморфизм $\mathbb{C}Gb_\lambda \to \mathbb{C}Ga_\lambda$ (отвечающий функции $F_0(g^{-1})$) имеет вид $yb_\lambda \mapsto yb_\lambda a_\lambda$. Поэтому подмодули $\tilde{V}_\lambda \subseteq W_\lambda$ и $V_\lambda \subseteq U_\lambda$ соответствуют образам этих гомоморфизмов, то есть левым идеалам $\mathbb{C}G\tilde{c}_\lambda$ и $\mathbb{C}Gc_\lambda$.

Элемент c_λ называется *симметризатором Юнга*. Легко проверить, что $c_\lambda^2 = m_\lambda c_\lambda$, где m_λ — некоторая константа, зависящая только от диаграммы λ.

Упражнение 6. Пусть V — произвольный $\mathbb{C}G$-модуль. Доказать, что кратность вхождения в V простого модуля V_λ равна $\dim(c_\lambda V)$.