**Задачи по алгебре. II курс, осень 1999 года.**
**Листок № 1.**

1) Доказать, что многочлен $xy^3 + x^2 - xy + y - 1$ неприводим в кольце $\mathbb{C}[x, y]$.
2) Доказать, что неприводимые множители однородного многочлена $f(x, y) = \sum a_k x^k y^{n-k} \in \mathbb{Q}[x, y]$ однородны. Как они связаны с неприводимыми множителями многочлена $f(x, 1) \in \mathbb{Q}[x]$?
3) Доказать, что определитель матрицы $n \times n$ — неприводимый многочлен от матричных элементов (в кольце $\mathbb{C}[(x_{ij})]$).
4) Доказать, что любой многочлен $f(x_{ij}) \in \mathbb{C}[(x_{ij})]$, удовлетворяющий условию $f(XY) = f(X)f(Y)$ (где $X = (x_{ij})$ и $Y = (y_{ij})$ — матрицы $n \times n$), имеет вид $f(X) = (\det X)^m$ для некоторого неотрицательного целого $m$.
5) Доказать, что $\Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]]$ (кольцо формальных степенных рядов от $n$ переменных) является нётеровым кольцом.
6) Существуют ли однородные неприводимые многочлены второй степени в а) $\mathbb{C}[x, y]$; б) $\mathbb{C}[x, y, z]$?
7) Обязательно ли конечнопорожденная алгебра над полем является
   а) факториальным кольцом? б) нётеровым кольцом?
8) Являются ли нётеровыми кольца
   а) $\Bbbk[x_1, x_2, \ldots]$ (кольцо многочленов от счётного множества переменных);
   б) $C[0, 1]$ (кольцо непрерывных функции на отрезке $[0, 1]$);
   в) кольцо степенных рядов от $z$ (над $\mathbb{C}$) с бесконечным радиусом сходимости;
   г) кольцо степенных рядов от $z$ (над $\mathbb{C}$) с ненулевым радиусом сходимости;
   д) подкольцо кольца $\mathbb{C}[z]$, состоящее из всех многочленов, у которых первые $k$ производных обращаются в нуль при $z = 0$;
   е) подкольцо кольца $\mathbb{C}[z, w]$, состоящее из всех многочленов, у которых все частные производные по $w$ обращаются в нуль при $z = 0$?
9) Пусть $R$ — область целостности, в которой всякая убывающая цепочка идеалов стабилизируется. Доказать, что $R$ является полем.
10) Доказать, что каждый идеал (нётерова) кольца содержится в некотором максимальном идеале.
11) Пусть $R$ — (нётерово) кольцо. Назовём многочлен $f(x) = \sum a_k x^k \in R[x]$ примитивным, если его коэффициенты порождают единичный идеал кольца $R$. Доказать, что произведение двух многочленов является примитивным многочленом тогда и только тогда, когда примитивны сомножители.