Задачи по алгебре. II курс, осень 1999 года.
Листок № 10.

1) Какие неприводимые представления S_3 и с какой кратностью входят в представление $\mathrm{Ind}_{S_2}^{S_3}\varepsilon$, где ε — нетривиальное одномерное представление группы S_2?
2) Какие неприводимые представления S_4 и с какой кратностью входят в представление $\mathrm{Ind}_H^{S_4}\rho$, где
   а) $H = S_3$, ρ — ее двумерное неприводимое представление;
   б) H — циклическая подгруппа порядка 4, ρ — ее одномерное представление (рассмотрите все варианты)?
   в) $H = A_4$, ρ — ее неприводимое представление (рассмотрите все варианты)?
3) а) Доказать, что характер квазирегулярного представления группы G в пространстве $\mathbb{C}X$, где $X = G/H$ для некоторой подгруппы $H \subset G$, вычисляется по формуле: $\chi(C) = \frac{|G|\cdot|C\cap H|}{|C|\cdot|H|}$, где C — класс сопряженных элементов группы G.
   б) Обобщить эту формулу на $\mathrm{Ind}_H^G\rho$, где ρ — произвольное представление группы H.
4) Пусть $\varphi \in \mathbb{C}[G]$ — $\mathbb{C}$-значная функция на группе G. Её *преобразованием Фурье* называется отображение $\hat{\varphi}$, сопоставляющее каждому представлению $\rho : G \to GL(V_\rho)$ эндоморфизм $\hat{\varphi}(\rho) = \sum_{g\in G}\varphi(g)\cdot\rho(g) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\rho)$.
   а) Доказать, что преобразование Фурье переводит свёртку функций на группе в композицию операторов.
   б) Доказать, что исходная функция на группе восстанавливается по своему преобразованию Фурье при помощи *обратного преобразования Фурье*, которое задаётся формулой
   $$\varphi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)}\dim(V_\rho)\cdot\mathrm{tr}(\rho(g^{-1})\circ\hat{\varphi}(\rho)),$$
   где $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех неизоморфных неприводимых представлений группы G (эта формула известна также как *формула обращения Фурье*).
   в) Доказать *формулу Планшереля*
   $$\sum_{g\in G}\varphi(g^{-1})\psi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)}\dim(V_\rho)\cdot\mathrm{tr}(\hat{\varphi}(\rho)\circ\hat{\psi}(\rho)).$$