**Задачи по алгебре. II курс, осень 1999 года.**
**Листок № 11.**

1) Доказать, что симплициальное представление симметрической группы неприводимо. Найти его характер.
2) Вычислить скалярный квадрат (относительно стандартной эрмитовой структуры на $\mathbb{C}[S_n]$) характера $k$-той внешней степени тавтологического представления симметрической группы а) $S_4$; б) $S_n$.
3) Доказать, что все внешние степени симплициального представления симметрической группы неприводимы.
4) Найти ненулевой тензор $\tau \in V^{\otimes 3}$, для которого
$$\mathrm{Sym}_3(\tau) = \mathrm{Alt}_3(\tau) = 0.$$
5) Разложить на неприводимые все представления $S_4$, индуцированные со всевозможных неприводимых представлений $S_3 \subset S_4$.
6) (*Конструкция Шура.*) С каждой таблицей Юнга, построенной по диаграмме Юнга $\lambda$, свяжем следующие три элемента групповой алгебры $\mathbb{C}S_n$:
$$a_\lambda = \sum_{\sigma \in R} \sigma, \qquad b_\lambda = \sum_{\sigma \in C} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sigma, \qquad c_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda$$
где $R, C \subseteq G$ — подгруппы, сохраняющие соответственно строки и столбцы выбранной таблицы Юнга. Элемент $c_\lambda$ называется *симметризатором Юнга*. Обозначим через $V_\lambda$ левый идеал, порождённый $c_\lambda$ в $\mathbb{C}S_n$ Доказать, что $V_\lambda$ — единственный (с точностью до изоморфизма) простой $\mathbb{C}S_n$-модуль, входящий как в $\mathrm{Ind}_R^{S_n} \mathbb{C}_1$, так и в $\mathrm{Ind}_C^{S_n} \mathbb{C}_\varepsilon$, где $\mathbb{C}_1$ — тривиальный одномерный $\mathbb{C}R$-модуль, а $\mathbb{C}_\varepsilon$ — знакопеременный одномерный $\mathbb{C}C$-модуль.
7) С какими диаграммами ассоциированы одномерные тривиальное и знакопеременное представления симметрической группы?
8) Доказать, что при применении конструкции Шура к сопряжённым диаграммам Юнга получатся представления, отличающиеся друг от друга тензорным умножением на одномерное знакопеременное представление.
9) Установить соответствие между представлениями Шура групп $S_3$ и $S_4$ и неприводимыми представлениями этих групп, описанными геометрически в задачах из прошлых листков.
10) Найти диаграмму, с которой ассоциированна $k$-тая внешняя степень симплициального представления симметрической группы.