Задачи по алгебре. II курс, осень 1999 года.
Листок № 2.

1) Доказать, что для любой невозрастающей последовательности неотрицательных целых чисел $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ рациональная функция
$$S_\lambda = \det(x_i^{n-j+\lambda_j}) / \det(x_i^{n-j})$$
является симметрическим многочленом от $x_1, \ldots, x_n$ (этот многочлен называется *функцией Шура*, соответствующей разбиению λ).
2) Пусть $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ — неединичный идеал. Доказать, что множеством нулей идеала I является начало координат тогда и только тогда, когда для достаточно больших натуральных d любой однородный многочлен степени d лежит в идеале I.
3) Идеал $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ называется однородным, если он порождён некоторым набором однородных образующих. Доказать, что идеал однороден тогда и только тогда, когда вместе с любым своим элементом он содержит и его однородные составляющие (суммы мономов фиксированной степени).
4) Доказать, что радикал однородного идеала в $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ однороден.
5) Доказать, что подмножество независимого множества $A \subset E$ тоже является независимым множеством.
6) Доказать, что независимое множество $A \subset E$ является базисом тогда и только тогда, когда $s(A) = E$.
7) Доказать, что любое зависимое множество $A \subset E$ содержит конечное зависимое подмножество.
8) Доказать, что любое зависимое множество $A \subset E$ содержит минимальное зависимое подмножество.
9) Доказать, что если $A \subset E$ — минимальное зависимое множество, то любой его элемент a лежит в замыкании множества $A \setminus \{a\}$.
10) Доказать, что если $A \subset E$ — независимое множество, и $b \in s(A)$, то $A \cup \{b\}$ содержит единственное минимальное зависимое множество.
11) Доказать, что если $A \subset E$ — независимое множество, и $b \in s(A)$, то A содержит такое конечное подмножество $A^{(b)}$, что $b \in s(A^{(b)})$, причём $A^{(b)}$ содержится в любом подмножестве множества A, замыкание которого содержит b.
12) Доказать, что если $A \subset E$ — независимое множество, и $b \in s(A)$, то $A \setminus \{a\} \cup \{b\}$ является независимым для тех и только тех элементов $a \in A$, которые принадлежат $A^{(b)}$.