Задачи по алгебре. II курс, осень 1999 года.
Листок № 3.

1) Пусть A — коммутативная алгебра над полем $\mathbb{k}$ и $a \in A$.
   а) Доказать, что если a — алгебраический элемент над $\mathbb{k}$, то $\mathbb{k}[a] \simeq \mathbb{k}[x]/(f_a(x))$, где $f_a(x) \in \mathbb{k}[x]$ — минимальный многочлен элемента a.
   б) Обязательно ли минимальный многочлен $f_a(x)$ алгебраического элемента $a \in A$ неприводим в $\mathbb{k}[x]$?
   в) Доказать, что если любой элемент $a \in A$ алгебраичен над $\mathbb{k}$ и имеет неприводимый минимальный многочлен, то A — поле.
2) Доказать неприводимость над полем рациональных чисел следующих многочленов:
   а) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;
   б) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;
   в) $x^{105} - 9$;
   г) $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$, где $a_1, \ldots, a_n$ — различные целые числа;
   д) $(x - a_1)^2 \ldots (x - a_n)^2 + 1$, где $a_1, \ldots, a_n$ — различные целые числа.
3) Найти минимальные многочлены для элементов а) $2 - 3i$ над $\mathbb{R}$; б) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$; в) $\sqrt{2} + 1$ над $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$; г) $\sqrt[105]{9}$ над $\mathbb{Q}$.
4) Пусть $\mathbb{k}$ — поле, $a \in \mathbb{k}$ и p — простое число. Доказать, что многочлен $x^p - a \in \mathbb{k}[x]$ либо неприводим, либо имеет корень в $\mathbb{k}$.
5) Пусть $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{L}$ — расширения полей. Доказать, что $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{k}} \mathbb{L} = \operatorname{tr.deg}_{\mathbb{k}} \mathbb{F} + \operatorname{tr.deg}_{\mathbb{F}} \mathbb{L}$.
6) Доказать, что над полем $\mathbb{k}$ характеристики $p > 0$ многочлен $f(x) = x^p - x - a$ либо неприводим, либо разлагается на линейные множители, и указать это разложение, если $f(x)$ имеет корень x_0.
7) Найти степень поля разложения над $\mathbb{Q}$ для многочленов

   а) $x^3 - 1$; б) $x^3 - 2$; в) $x^4 - 2$; г) $x^p - 1$; д) $x^p - 2$.
8) Доказать, что поле является алгебраически замкнутым тогда и только тогда, когда оно алгебраически замкнуто в любом своем расширении.
9) Доказать, что алгебраическое замыкание поля единственно с точностью до изоморфизма.
10) Являются ли числа $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $b = \sqrt{2} + i$ примитивными элементами расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}$?