Задачи по алгебре. II курс, осень 1999 года.
Листок № 5.

1) Чему равны норма и след элемента $a+b\sqrt{-3}\in\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$?
2) Описать целое замыкание R кольца $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$.
3) Доказать, что кольцо R из предыдущей задачи является евклидовым.
4) Доказать, что кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ не является евклидовым.
5) Пусть R — целозамкнутая область целостности, $\Bbbk$ — её поле частных, $\mathbb{F}/\Bbbk$ — конечное расширение. Доказать, что элемент $a\in\mathbb{F}$ является целым над R тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен над $\Bbbk$ (со старшим коэффициентом 1) принадлежит $R[x]$.
6) Пусть $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{C}$ — квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$ (порождённое присоединением корня неприводимого многочлена второй степени). Пусть $a\in\mathbb{F}$ — такой элемент, что его норма и след принадлежат $\mathbb{Z}$. Обязательно ли a — целое алгебраическое число?
7) Описать целое замыкание кольца $\mathbb{Z}$ в расширении $\mathbb{Q}(\sqrt{k})$, где k — целое число, свободное от квадратов.
8) Доказать, что любое алгебраическое расширение совершенного поля является совершенным полем.
9) Пусть $\mathbb{F}/\Bbbk$ — сепарабельное расширение степени n и $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ — всевозможные вложения $\mathbb{F}$ в $\bar{\Bbbk}$ над $\Bbbk$. Доказать, что $a\in\mathbb{F}$ является примитивным элементом тогда и только тогда, когда все $\varphi_i(a)$ различны.
10) Пусть $\mathbb{F}$ — поле разложения многочлена x^4+3x^2+2 над $\mathbb{Q}$.
    а) Найти $[\mathbb{F}:\mathbb{Q}]$.
    б) Найти какой-нибудь примитивный элемент $\mathbb{F}$ над $\mathbb{Q}$.
11) Пусть $\Bbbk(a)/\Bbbk$ — конечное расширение, $\Bbbk\subseteq\mathbb{L}\subseteq\Bbbk(a)$, $f(x)$ — минимальный многочлен элемента a над полем $\mathbb{L}$. Доказать, что коэффициенты многочлена $f(x)$ порождают поле $\mathbb{L}$ над $\Bbbk$.
12) Доказать, что если алгебраическое расширение $\mathbb{F}/\Bbbk$ имеет примитивный элемент, то существует лишь конечное число промежуточных полей, то есть таких подполей $\mathbb{L}\subseteq\mathbb{F}$, что $\Bbbk\subseteq\mathbb{L}$.
13) Доказать, что если для алгебраического расширения $\mathbb{F}/\Bbbk$ существует лишь конечное число промежуточных полей, то оно имеет примитивный элемент.
14) Пусть $\Bbbk$ — поле характеристики p. Положим $\mathbb{F}=\Bbbk(x,y)$ (поле рациональных функций от двух переменных), $\mathbb{L}=\Bbbk(x^p,y^p)\subseteq\mathbb{F}$. Доказать, что $\mathbb{F}/\mathbb{L}$ — конечное расширение степени p^2, и что множество промежуточных полей бесконечно.