Задачи по алгебре. II курс, осень 1999 года.
Листок № 6.

1) Найти группу Галуа расширения: а) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$; б) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]/\mathbb{Q}$.

2) Пусть G — конечная группа автоморфизмов поля $\mathbb{F}$ и $\Bbbk = \mathbb{F}^G$ — поле неподвижных элементов. Доказать, что $\mathbb{F}/\Bbbk$ — расширение Галуа, и $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\Bbbk) = G$.

3) Группой Галуа сепарабельного многочлена $f(x) \in \Bbbk[x]$ называется группа Галуа поля разложения этого многочлена над $\Bbbk$, рассматриваемая как группа перестановок корней многочлена $f(x)$. Найти группы Галуа над полем $\mathbb{Q}$ многочленов

а) $x^3 - 1$; б) $x^3 - 2$; в) $x^4 - 2$; г) $x^p - 1$; д) $x^p - 2$.

4) Доказать, что группа Галуа многочлена $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ над полем $\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_n)$ рациональных функций от n переменных $a_1, \ldots, a_n$ изоморфна симметрической группе S_n.

5) Доказать, что любая конечная группа изоморфна группе Галуа некоторого расширения полей.

6) Доказать, что в расширении Галуа $\mathbb{F}/\Bbbk$ с группой G есть такой элемент $a \in \mathbb{F}$, что элементы вида $g(a)$, где $g \in G$, составляют базис $\mathbb{F}$ над $\Bbbk$.

7) Пусть $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$

а) Доказать, что если расширение $\mathbb{F}/\Bbbk$ порождено присоединением к $\Bbbk$ некоторого корня из 1, то это расширение нормально и группа Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\Bbbk)$ является абелевой.

В следующих пунктах мы предполагаем, что поле $\Bbbk$ содержит n различных корней n-й степени из 1.

б) Доказать, что для любого $a \in \Bbbk$ группа Галуа многочлена $x^n - a$ циклическая.

в) Доказать, что если группа Галуа расширения $\mathbb{F}/\Bbbk$ изоморфна $\mathbb{Z}_n$, σ — образующая этой группы и ε — примитивный корень степени n из 1, то существует такой элемент $c \in \mathbb{F}$, что $\sum \varepsilon^k \sigma^k(c) \neq 0$.

г) Доказать, что если группа Галуа расширения $\mathbb{F}/\Bbbk$ изоморфна $\mathbb{Z}_n$, то $\mathbb{F} = \Bbbk(\sqrt[n]{a})$ для некоторого $a \in \Bbbk$.

8) Пусть $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$ и $f(x) \in \Bbbk[x]$ — неприводимый многочлен. Доказать, что группа Галуа многочлена $f(x)$ разрешима тогда и только тогда, когда уравнение $f(x) = 0$ разрешимо в неприводимых радикалах (то есть существует такая последовательность расширений $\Bbbk = \mathbb{F}_0 \subseteq \mathbb{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{F}_k$, что $\mathbb{F}_j = \mathbb{F}_{j-1}(b_j)$, где b_j — корень неприводимого над $\mathbb{F}_{j-1}$ многочлена вида $x^{n_j} - a_j$, причём поле $\mathbb{F}_k$ содержит некоторый корень многочлена $f(x)$).