**Задачи по алгебре. II курс, осень 1999 года.**
**Листок № 7.**

1) Классифицировать простые $A$-модули, где
   а) $A = \mathbb{C}[x]/(x^2 - 3x + 2)$;
   б) $A = \mathbb{C}[x]/(x^2 - 2x + 1)$.
2) Является ли полупростым любой $A$-модуль для алгебры $A$ из предыдущей задачи?
3) Отождествим алгебру $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$ с $M_2(\mathbb{C})$. Найти алгебру $A^! = \mathrm{End}_A(\mathbb{C}^2)$, если $A$ — алгебра всех матриц вида а) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. В каких из этих случаев $A^{!!} = A$?
4) Доказать, что все простые модули над алгеброй $M_n(\mathbb{C})$ изоморфны.
5) Сколько неизоморфных простых модулей над алгеброй $M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$?
6) Пусть $V = \mathbb{C}^2$ и $(e_1, e_2)$ — стандартный базис $V$. Рассмотрим в тензорной алгебре $T(V)$ двусторонний идеал $I$, порожденный $e_1 \otimes e_1$, $e_2 \otimes e_2$ и $(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - 1)$. Обозначим через $C$ факторалгебру $T(V)/I$.
   а) Чему равна размерность алгебры $C$?
   б) Пусть $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Доказать, что существует матричное представление алгебры $C$, переводящее $e_1$ в $X$, а $e_2$ в $Y$. Является ли оно неприводимым?
   в) Перечислить все (с точностью до эквивалентности) неприводимые представления алгебры $C$ (простые $C$-модули).
7) Пусть $V$ — $n$-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, а $q$ — квадратичная форма на $V$. *Алгеброй Клиффорда* $C(q)$ называется факторалгебра тензорной алгебры пространства $V$ по двустороннему идеалу, порожденному элементами вида $v \otimes v - q(v)$. Чему равна размерность $C(q)$?
8) Пусть $V = W^* \oplus W$ и $q$ — квадратичная форма на $V$, заданная формулой $q((\varphi, w)) = \varphi(w)$. Положим $M = \Lambda(W)$.
   а) Доказать, что существует неприводимое представление алгебры Клиффорда $C(q)$ в пространстве $M$, переводящее $(\varphi, 0) \in V$ в оператор внутреннего умножения на $\varphi \in W^*$, а $(0, w)$ — в оператор внешнего умножения на $w \in W$.
   б) Доказать, что любое неприводимое представление алгебры $C(q)$ эквивалентно этому представлению.