Задачи по алгебре. II курс, осень 1999 года.
Листок № 8.

1) Найти все такие группы G, для которых $\mathbb{C}G = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ (прямая сумма алгебр).
2) Перечислить все (с точностью до изоморфизма) конечные группы G, для которых групповая алгебра $\mathbb{C}G$ изоморфна
   а) прямой сумме двух матричных алгебр;
   б) прямой сумме трех матричных алгебр.
3) а) Какие собственные значения могут иметь операторы комплексного линейного представления группы D_3?
   б) Как действует оператор, представляющий симметрию треугольника, на собственных подпространствах оператора, представляющего поворот?
   в) Доказать, что группа D_3 имеет всего три неприводимых комплексных преставления: два одномерных и одно двумерное.
   г) Выписать явное разложение левого регулярного представления группы D_3 в сумму неприводимых представлений.
4) Описать все неприводимые комплексные представления группы D_n.
5) Рассмотрим следующие вещественные представления симметрической группы S_4:
   - тривиальное одномерное представление;
   - одномерное представление, в котором каждае перестановка действует умножением на свой знак;
   - композиция канонической проекции $S_4 \to S_4/V_4$, изоморфизмов $S_4/V_4 \xrightarrow{\sim} S_3 \xrightarrow{\sim} D_3$ и неприводимого двумерного представления группы D_3;
   - изоморфизм S_4 на группу вращений куба;
   - изоморфизм S_4 на группу всех (в том числе несобственных) движений тетраэдра.

   Доказать, что все эти представления являются неприводимыми, что все они остаются неприводимыми при комплексификации, и что таким образом получаются все неприводимые комплексные представления S_4.
6) Доказать полную приводимость и найти все минимальные инвариантные подпространства для следующих представлений группы $GL_n(\mathbb{k})$ в пространстве матриц $M_n(\mathbb{k})$: а) $L(A)X = AX$; б) $\mathrm{Ad}(A)X = AXA^{-1}$ ($\mathrm{char}\,\mathbb{k}$ не делит n); в) $\Phi(A)X = AXA^t$ ($\mathrm{char}\,\mathbb{k} \neq 2$).