Задачи по алгебре. II курс, осень 1999 года.
Листок № 9.

Во всех задачах G — конечная группа, под G-модулем понимается $\mathbb{C}G$-модуль, под его характером — характер соответствующего представления группы G.

1) Пусть V_1 и V_2 — G-модули, χ_1 и χ_2 — их характеры. Чему равны характеры G-модулей: а) $V_1 \oplus V_2$, б) $V_1 \otimes V_2$, в) V_1^*, г) $\Lambda^2 V_1$, д) $S^2 V_1$?
2) Составить таблицу характеров группы а) S_3; б) D_4; в) A_4; д) S_4.
3) Построить базис из матричных элементов в пространстве $\mathbb{C}[S_3]$.
4) Для каких конечных групп регулярное представление над полем $\mathbb{C}$ содержит лишь конечное число подпредставлений?
5) Пусть G — конечная группа, $\chi_1, \ldots, \chi_k$ — все различные неприводимые характеры группы G. Доказать, что
$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g^{-1})\chi_i(h) = \begin{cases} \frac{|G|}{c(g)}, & \text{если } h \text{ сопряжен с } g, \\ 0, & \text{если } h \text{ не сопряжен с } g, \end{cases}$$
где через $c(g)$ обозначено число элементов группы G, сопряженных с g.
6) Пусть $G = S_3$ и V — простой двумерный G-модуль. Вычислить характер $V^{\otimes n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и разложить этот модуль в прямую сумму простых G-модулей.
7) Доказать, что для любого элемента g неединичной конечной группы G существует такой нетривиальный неприводимый комплексный характер χ группы G, что $\chi(g) \neq 0$.
8) Пусть V, W — $\mathbb{C}G$-модули, а χ_V, χ_W — соответствующие характеры. Доказать, что $\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = (\chi_V, \chi_W)$.
9) Для каких из перечисленных групп их групповые алгебры над полем $\mathbb{C}$ изоморфны: $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, D_4, $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$?
10) Доказать, что представление конечной группы изоморфно своему сопряженному тогда и только тогда, когда все значения его характера вещественны.
11) Пусть $\rho : G \to GL(V)$ — эффективное представление конечной группы G (то есть $G \simeq \rho(G)$). Доказать, что в разложениях его тензорных степеней встречаются все неприводимые представления группы G.