АЛГЕБРА 1999/2000
I СЕМЕСТР
Листок 3

Ф. Зак, А. Иншаков, А. Обломков, С. Дориченко

Если K — поле, то $K[T]$ — кольцо главных идеалов (задача 1.14), так что всякий неприводимый многочлен $P(T)$ определяет поле $K[T]/(P)$, являющееся расширением K. Таким образом можно получить много новых примеров полей.

✓Задача 3.1. Пусть $p > 2$ — простое число, и пусть $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ — поле из p элементов. Проверьте, что в F_p существуют ровно $\frac{p-1}{2}$ элементов, из которых не извлекается квадратный корень (т.е. $b^2 \neq a$ при всех $b \in \mathbb{F}_p$). Докажите, что для каждого такого элемента a факторкольцо $\mathbb{F}_p[T]/(T^2 - a)$ является полем из p^2 элементов. Какова характеристика этого поля?

На самом деле, все поля, получающиеся с помощью процедуры, описанной в задаче 3.1 при различных $a \in \mathbb{F}_p$, изоморфны между собой.

Упражнение 3.2. Докажите, что для любых $a, a' \in \mathbb{F}_p$, из которых не извлекается квадратный корень,

$$\mathbb{F}_p[T]/(T^2 - a) \simeq \mathbb{F}_p[T]/(T^2 - b).$$

Конструкция, изложенная в задаче 3.1, применима только при нечётных p. Тем не менее, её можно немного модифицировать с тем, чтобы охватить и случай $p = 2$.

✓Задача 3.3. Постройте поле из четырёх элементов. Докажите, что все такие поля изоморфны между собой.

Расширений поля рациональных чисел существует гораздо больше, чем расширений конечного поля.

✓Упражнение 3.4. Изоморфны ли между собой поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$?

В задаче 2.20 мы ввели поле комплексных чисел как фактор кольца $\mathbb{R}[T]$ по идеалу $(T^2 + 1)$. На самом деле многочлен $T^2 + 1$ можно заменить на любой неприводимый квадратный трёхчлен.

✓Упражнение 3.5. Если $P \in \mathbb{R}[T]$ — квадратный трёхчлен, то $\mathbb{R}[T]/(P) \simeq \mathbb{C}$.

Определение 3.1. Поле K называется *алгебраически замкнутым*, если всякий многочлен $P \in K[T]$ имеет корень $\alpha \in K$.

Следствие 3.1. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле, $P \in K[T]$, $\deg P = n$, $P = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$. Тогда $P = a_n \cdot \prod_i (T - \alpha_i)^{k_i}$, где $\alpha_i \in K$, $\sum_i k_i = n$. Другими словами, всякий многочлен над K представляется в виде произведения линейных множителей.*

Теорема 3.2 («Основная теорема алгебры»). *Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто.*

Следствие 3.3. *Всякий многочлен $P \in \mathbb{R}[T]$ может быть представлен в виде произведения многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше двух.*

Определение 3.2. Кольцо A называется *нётеровым*, если всякая возрастающая цепочка идеалов $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_k \subseteq \cdots$ стабилизируется, т.е. существует число k такое, что $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_k$ при $i > k$.

$\checkmark$**Задача 3.6.** Докажите, что кольцо A нётерово тогда и только тогда, когда каждый идеал в A конечно порождён, т.е. для всякого идеала $\mathfrak{a} \subseteq A$ существуют элементы $a_1, \dots, a_k \in \mathfrak{a}$ такие, что $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_k) = A \cdot a_1 + \cdots + A \cdot a_k$.

$\checkmark$**Упражнение 3.7.** Пусть $A \to B$ — эпиморфизм колец. Докажите, что если A нётерово, то B также нётерово. Справедливо ли обратное утверждение?

Упражнение 3.8. Какие из встречавшихся вам до сих пор колец являются нётеровыми, а какие нет?

Теорема 3.4 («Теорема Гильберта о базисе»). *Пусть A — нётерово кольцо. Тогда кольцо многочленов $A[T]$ также нётерово.*

Следствие 3.5. *Пусть A — кольцо, конечно порождённое над нётеровым кольцом B, т.е. $A = B[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{u}$, где $\mathfrak{u} \subset B[T_1, \dots, T_n]$ — идеал. Тогда A — нётерово кольцо.*

$\checkmark$**Упражнение 3.9.** Пусть A — нётерово кольцо. Тогда всякий идеал $\mathfrak{a} \subsetneq A$ содержится в некотором максимальном идеале.

На самом деле утверждение упражнения 3.9 справедливо для произвольных (не обязательно нётеровых) колец, однако его доказательство (как и доказательство других утверждений такого типа) опирается на некоторые постулаты теории множеств (лемма Цорна, аксиома выбора). Тем не менее, только используя такого рода факты удаётся доказать следующий результат.

Теорема 3.6. *Всякое поле содержится в некотором алгебраически замкнутом поле.*

Определение 3.3. Пусть G — конечная группа линейных преобразований переменных $X_1, \dots, X_n$, т.е. для всякого элемента $\sigma \in G$ имеем $X_i^\sigma = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^\sigma X_j$, $a_{ij}^\sigma \in K$, $i, j = 1, \dots, n$, причём произведением в G является композиция преобразований, единицей служит тождественное преобразование, и для каждого преобразования $\sigma \in G$ существует обратное преобразование $\sigma^{-1} \in G$. Индуцированное действие G на многочленах задаётся формулой $F^\sigma(X_1, \dots, X_n) = F(X_1^\sigma, \dots, X_n^\sigma)$, $F \in K[X_1, \dots, X_n]$. Многочлен F называется *инвариантом* действия G, если для всех $\sigma \in G$ имеем $F^\sigma = F$. Инварианты образуют кольцо $K[X_1, \dots, X_n]^G \subset K[X_1, \dots, X_n]$, называемое *кольцом инвариантов*.

$\checkmark$**Упражнение 3.10.** Докажите, что многочлен $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ является инвариантом тогда и только тогда, когда для любого $m \geq 0$ этим свойством обладает его однородная компонента F_m степени m (здесь и далее $F = \sum_m F_m$, где F_m — сумма одночленов степени m, входящих в F).

$\checkmark$**Упражнение 3.11.** Пусть G — конечная группа линейных преобразований переменных $X_1, \dots, X_n$. Обозначим через $|G|$ порядок (т.е. количество элементов в) G и предположим, что $(|G|, \operatorname{char} K) = 1$. Определим операцию *усреднения* μ, полагая $\mu(F) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G} F^\sigma$. Проверьте, что μ сохраняет степень (т.е. для всех $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ и $m \geq 0$ имеем $(\mu(F))_m = \mu(F_m)$) и $\mu(F) = F$ при $F \in K[X_1, \dots, X_n]^G$. Является ли μ гомоморфизмом?

Пример. Пусть G — группа перестановок переменных $X_1, \dots, X_n$, состоящая из $n!$ элементов. Тогда многочлены $s_1 = \sum_{i=1}^n X_i$, $s_2 = \sum_{i<j} X_iX_j, \dots, s_n = X_1 \cdots X_n$, называемые *элементарными симметрическими функциями*, являются инвариантами.

На самом деле, элементарные симметрические функции нам уже встречались в упражнении 2.13, которое мы здесь переформулируем более явным образом.

$\checkmark$**Упражнение 3.12.** Докажите *теорему Виета*: *Пусть* $P = X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n \in K[X]$ *— многочлен, имеющий* n *корней* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K'$, *где* $K' \supset K$ *(другими словами,* $P = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$*; элементы* α_i *не обязательно различны между собой). Тогда* $a_i = \pm s_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $i = 1, \dots, n$ (вычислите знак!).

Теорема 3.7 («Основная теорема теории симметрических функций»). *Пусть* G *— симметрическая группа, т.е. группа всех перестановок переменных* $X_1, \dots, X_n$. *Тогда* $K[X_1, \dots, X_n]^G = K[s_1, \dots, s_n] \subset K[X_1, \dots, X_n]$ *— подкольцо, изоморфное кольцу многочленов от* n *переменных.*

$\checkmark$**Задача 3.13.** Пусть $K' \supset K$ — расширение полей, и пусть $K^a \subset K'$ — множество элементов, алгебраических над K (см. определение 2.7). Докажите, что $K^a \supset K$ — поле (т.е. сумма, произведение, разность и частное алгебраических элементов являются алгебраическими элементами).

Задача 3.14. Пусть $K' \supset K$ — расширение полей, и пусть $\alpha, \beta \in K'$ — алгебраические элементы, являющиеся корнями неприводимых многочленов из $K[T]$ степеней a и b соответственно. Дайте точные оценки сверху для степеней неприводимых многочленов, корнями которых являются элементы $\alpha \pm \beta$, $\alpha \cdot \beta$ и $\frac{\alpha}{\beta}$ (ср. задачу 3.13).

Задача 3.15.

a) Пусть G — группа второго порядка переменных X, Y, порождённая преобразованием σ таким, что $X^\sigma = -X$, $Y^\sigma = -Y$. Найдите образующие кольца $\mathbb{C}[X,Y]^G$. Докажите, что $\mathbb{C}[X,Y]^G \simeq \mathbb{C}[T_1,T_2,T_3]/(T_1T_3 - T_2^2)$. Проверьте, что $\mathbb{C}[X,Y]^G \not\simeq \mathbb{C}[X,Y]$.

b) Сформулируйте и решите аналогичную задачу для группы G, $|G| = m$, порождённой преобразованием σ, для которого $X^\sigma = \varepsilon \cdot X$, $Y^\sigma = \varepsilon \cdot Y$, где $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$.

Задача 3.16. Найдите все линейные действия группы второго порядка G на переменные X, Y, для которых $\mathbb{C}[X,Y]^G \simeq \mathbb{C}[X,Y]$.

Теорема 3.8 («Основная теорема теории инвариантов»). *Пусть G — конечная группа линейных преобразований, $(|G|, \operatorname{char} K) = 1$. Тогда кольцо $K[X_1,\ldots,X_n]^G$ конечно порождено.*

В задаче 2.14 мы видели, что различные многочлены из $K[X]$ могут определять одинаковые функции на поле K. Однако это возможно только для конечного поля.

√**Задача 3.17.** Пусть K — бесконечное поле, $F_1, F_2 \in K[X_1,\ldots,X_n]$, $F_1 \neq F_2$. Докажите, что F_1 и F_2 определяют разные функции на поле K, т.е. существуют элементы $a_1,\ldots,a_n \in K$ такие, что $F_1(a_1,\ldots,a_n) \neq F_2(a_1,\ldots,a_n)$.

Задача 3.17 показывает, что кольцо многочленов $K[X_1,\ldots,X_n]$ можно рассматривать как кольцо функций от n переменных $X_1,\ldots,X_n$. Каждому подмножеству $I \subset K[X_1,\ldots,X_n]$ можно сопоставить подмножество

$$Z(I) = \{(a_1,\ldots,a_n) \in K^n \mid f(a_1,\ldots,a_n) = 0 \quad \forall f \in I\}. \qquad (*)$$

Множества такого вида называются *аффинными алгебраическими многообразиями*, а решения системы уравнений $(*)$ — их точками. При этом ясно, что множество $Z(I)$ не изменится, если заменить множество I идеалом, который оно порождает в $K[X_1,\ldots,X_n]$.

Обратно, пусть $X \subset K^n$ — произвольное подмножество. Положим

$$I(X) = \{f \in K[X_1,\ldots,X_n] \mid f(a_1,\ldots,a_n) = 0 \quad \forall (a_1,\ldots,a_n) \in X\}. \qquad (**)$$

Ясно, что $I(X) \subset K[X_1,\ldots,X_n]$ — идеал. *Регулярными функциями на X* называются ограничения на X многочленов из $K[X_1,\ldots,X_n]$; кольцо $K[X] = K[X_1,\ldots,X_n]/I(X)$ называется *кольцом регулярных функций на X*.

Не всякое кольцо вида $A = K[X_1,\ldots,X_n]/I$ является кольцом регулярных функций некоторого подмножества. Так, если $f \in A$ — такой элемент, что $f^m = 0$ для некоторого m, то $f(a_1,\ldots,a_n) = f^m(a_1,\ldots,a_n) = 0$ для всех точек $(a_1,\ldots,a_n) \in X$, и если A — кольцо регулярных функций на X, то $f = 0$.

Определение 3.4. Элемент a кольца A называется *нильпотентным* (или *нильпотентом*), если $a^m = 0$ для некоторого натурального числа m. Множество $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных элементов называется *нильрадикалом* кольца A. Кольцо A называется *приведённым*, если $\mathfrak{N}(A) = 0$.

√**Упражнение 3.18.** Найдите нильрадикалы колец $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}[X,Y]/(X^k, Y^l)$ (k, l и m — натуральные числа).

√**Задача 3.19.** Докажите, что нильрадикал $\mathfrak{N}$ является идеалом кольца A и что в кольце $A/\mathfrak{N}$ нет ненулевых нильпотентов.

Определение 3.5. Пусть A — кольцо, $I \subset A$ — идеал. *Радикалом* $\operatorname{rad} I$ идеала I называется множество элементов $a \in A$ таких, что $a^m \in I$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Идеал называется *радикальным*, если $I = \operatorname{rad} I$. Таким образом, идеал I радикален если и только если A/I — приведённое кольцо.

Предшествующее обсуждение показывает, что всякий идеал вида $I(X)$ радикален. Тем не менее, не всякий радикальный идеал в $K[X_1, \ldots, X_n]$ имеет вид $I(X)$. Например, пусть $I = (X^2 + 1) \subset \mathbb{R}[X]$. Тогда I радикален, но $Z(I) = \varnothing$, так что $I \neq I(X)$ ни для какого множества X. Ситуация упрощается для алгебраически замкнутого поля K.

✓**Упражнение 3.20.** Пусть K — алгебраически замкнутое поле. Найдите все радикальные идеалы в $K[T]$ и докажите, что все они имеют вид $I(X)$ для некоторого подмножества $X \subset K$. Более точно, для всякого идеала $I \subset K[T]$ имеем $I(Z(I)) = \operatorname{rad} I$.

Оказывается, что взаимно однозначное соответствие между аффинными алгебраическими многообразиями и радикальными идеалами имеет место для многочленов от произвольного числа переменных.

Теорема 3.9 («Теорема Гильберта о нулях»). *Пусть K — алгебраически замкнутое поле. Тогда для любого идеала $I \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ имеем $I(Z(I)) = \operatorname{rad} I$. Таким образом, отображения $I \mapsto Z(I)$ и $X \mapsto I(X)$ (см. $(*)$ и $(**)$) определяют взаимно однозначное соответствие между множеством аффинных алгебраических многообразий в K^n и множеством радикальных идеалов в $K[X_1, \ldots, X_n]$.*

Следствие 3.10. *Пусть $f_1, \ldots, f_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$, где K — алгебраически замкнутое поле, и пусть*

$$\begin{array}{l} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array} \tag{\#}$$

— система полиномиальных уравнений. Следующие условия эквивалентны:

а) *Система (#) не имеет решений в K^n;*

б) *Существуют многочлены $g_1, \ldots, g_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$ такие, что*

$$\sum_{i=1}^{m} g_i f_i = 1. \tag{\#\#}$$

Замечание 3.1. Для того, чтобы применять критерий из следствия 3.10 на практике, необходимо дать оценки степеней и коэффициентов многочленов g_i из (##). Эта проблема стала весьма популярна в последние годы, и ей посвящены многие недавние работы ряда известных математиков. Так, если известно, что $\deg f_i \leq d$, где $d > 2$, то в (##) можно выбрать многочлены g_i так, что $\deg g_i f_i \leq d^n$, $i = 1, \ldots, m$. Попробуйте и вы отыскать по возможности более простые решения g_i системы уравнений (##).

Следствие 3.11. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле, и пусть $A \supset K$ — кольцо. Следующие условия эквивалентны:*

а) *A — кольцо регулярных функций на некотором алгебраическом многообразии X;*

б) *Кольцо A приведено (см. определение 3.4) и порождено над K конечным числом элементов A (т.е. $A = K[f_1, \ldots, f_m]$, где $f_1, \ldots, f_m \in A$).*

✓**Упражнение 3.21.** Пусть K — поле, и пусть $A = K[X] = K[X_1, \ldots, X_n]/I$ — алгебра регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии X. Докажите, что для всякой точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ идеал регулярных функций $f \in A$, обращающихся в нуль в x, максимален и порождён образами элементов $X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n$.

Следующее следствие показывает, что если поле K алгебраически замкнуто, то все максимальные идеалы кольца A получаются таким образом.

Следствие 3.12. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле, и пусть X — аффинное алгебраическое многообразие в K^n. Тогда всякий максимальный идеал в кольце $K[X] = K[X_1, \ldots, X_n]/I$ имеет вид $(X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)/I$ для некоторой точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$. Таким образом, точки X находятся во взаимно однозначном соответствии с максимальными идеалами кольца $K[X]$.*

Следствия 3.11 и 3.12 показывают, что для приведённых колец конечного типа над алгебраически замкнутым полем геометрическому понятию «точка» соответствует алгебраическое понятие «максимальный идеал». Естественно попытаться распространить это соответствие на произвольные кольца с тем, чтобы, например, получить возможность говорить о «точках» колец арифметического происхождения и привлечь геометрическую интуицию для исследования теоретико-числовых проблем. Однако удобнее называть точками не только максимальные, но и произвольные простые идеалы. Это вызвано, в частности, тем, что простые идеалы, в отличие от максимальных, хорошо ведут себя при гомоморфизмах (см. упражнение 2.3).

Определение 3.6. Множество простых идеалов кольца A (включая нулевой идеал, если он прост, но исключая само кольцо A) называется его *спектром* и обозначается $\operatorname{Spec} A$. Простые идеалы называются *точками спектра*. Спектры колец называются также *аффинными схемами.*

Аналогично, множество максимальных идеалов кольца A называется его *максимальным спектром* и обозначается $\operatorname{Specm} A$.

Каждому гомоморфизму колец $\varphi\colon A \to B$ соответствует отображение их спектров в обратную сторону $f = f(\varphi)\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ (см. упражнение 2.3).

Каждой точке $x \in \operatorname{Spec} A$ соответствует факторкольцо кольца A по соответствующему простому идеалу. По определению, это факторкольцо является областью целостности; его поле частных обозначим через $k(x)$. Элементы кольца A можно рассматривать как «функции» на $\operatorname{Spec} A$; при этом значением функции $a \in A$ в точке x является элемент $a(x) \in k(x)$, являющийся образом a при гомоморфизме $A \to k(x)$. Таким образом, значения функций в разных точках принадлежат, вообще говоря, разным множествам!

Пример. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ — множество, состоящее из простых главных идеалов (2), (3), (5), (7), … и нулевого идеала (0). Значение целого числа m, рассматриваемого как функция на $\mathbb{Z}$, в точке (p) принадлежит $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, а в точке (0) — полю рациональных чисел. Вложение колец $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$ определяет отображение $f\colon \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[i] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Решив задачу 2.22, вы убедитесь, что у точек, соответствующих простым идеалам (0), (2) и (p), где p — простое число вида $4k + 3$, при отображении f один прообраз, а у точек, соответствующих идеалу (p), где p — простое число вида $4k+1$, — два прообраза.

Обычно функция определяется своими значениями (ср. задачи 2.14 и 3.17). Но для приведённого выше определения это не совсем так. Ясно, что функция $a \in A$ обращается в нуль во всех точках $x \in \operatorname{Spec} A$ тогда и только тогда, когда a принадлежит всем простым идеалам кольца A.

Задача 3.22. Пусть A — нётерово кольцо. Докажите, что $\bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p} = \mathfrak{N}(A)$, т.е. пересечение всех простых идеалов кольца A совпадает с его нильрадикалом. Другими словами, функция $a \in A$ обращается в нуль во всех точках $\operatorname{Spec} A$ тогда и только тогда, когда $a \in \mathfrak{N}$. Как и в случае с упражнением 3.9, используя лемму Цорна, нетрудно доказать утверждение задачи 3.22 для произвольных (не обязательно нётеровых) колец.

Определение 3.7. Пусть A — кольцо, $E \subset A$ — подмножество, и пусть $V(E) \subset \operatorname{Spec} A$, $V(E) = \{\mathfrak{p} \supset E\}$. Топология в $\operatorname{Spec} A$, в которой замкнутыми множествами служат $V(E)$, называется *топологией Зариского.*

Упражнение 3.23. Докажите, что выполнены следующие соотношения:

а) $\cap_\alpha V(E_\alpha) = V(\cup_\alpha E_\alpha)$;

б) $V(E_1) \cup V(E_2) = V(I)$, где I — пересечение идеалов, порождённых множествами E_1 и E_2.

Таким образом, множества $V(E)$ удовлетворяют аксиомам системы замкнутых множеств топологического пространства.

Упражнение 3.24. Пусть $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец, пусть $E \subset A$, и пусть $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ — соответствующее отображение. Докажите, что $f^{-1}(V(E)) = V(\varphi(E))$, так что f — непрерывное отображение топологических пространств.

Упражнение 3.25. Пусть A — кольцо, $E \subset A$ — подмножество, и пусть $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(E)$ — идеал, порождённый E. Докажите, что стандартный гомоморфизм $A \to A/\mathfrak{a}$ порождает гомеоморфизм $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to V(E)$, так что все замкнутые подмножества в $\operatorname{Spec} A$ гомеоморфны спектрам колец.

Определение 3.8. Пусть A — кольцо, $f \in A$, $X = \operatorname{Spec} A$. Открытые множества вида $X_f = \operatorname{Spec} A \setminus V(f)$ называются *главными открытыми множествами.*

Задача 3.26. Докажите, что

а) Множества X_f образуют базис открытых множеств в топологии Зариского;

б) $X_f = \varnothing$ тогда и только тогда, когда f нильпотентен;

в) $X_f = X$ тогда и только тогда, когда f обратим.

Задача 3.27. Докажите, что $\operatorname{Spec} A$ компактно в топологии Зариского, т.е. из всякого покрытия можно выбрать конечное.

Определение 3.9. Пусть X — топологическое пространство. Точка $x \in X$ называется *общей точкой* X, если $\bar{x} = X$ (черта обозначает замыкание).

Определение 3.10. Топологическое пространство X называется *приводимым*, если $X = X_1 \cup X_2$, где $X_1, X_2 \neq X$ — замкнутые подмножества X, и *неприводимым* в противном случае.

Задача 3.28. Пусть $X = \operatorname{Spec} A$. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

1) X неприводимо;
2) Всякая пара непустых открытых подмножеств в X пересекается;
3) Всякое непустое открытое подмножество плотно в X;
4) X имеет общую точку;
5) Нильрадикал $\mathfrak{N}$ кольца A прост.

Задача 3.29. Пусть $X = \operatorname{Spec} A$, где A — нётерово кольцо. Тогда существует единственное представление $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$, где $X_i \not\subseteq X_j$, $i \neq j$ — неприводимые замкнутые подмножества.

Определение 3.11. Максимальная длина n цепочки непустых неприводимых замкнутых подмножеств $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n$ топологического пространства X называется *размерностью* X и обозначается $\dim X$ (таким образом, размерность — это либо неотрицательное целое число, либо $+\infty$). Если A — кольцо, а $X = \operatorname{Spec} A$, то размерностью A называется размерность X. Другими словами, $\dim A$ — это максимальная длина n строго возрастающей последовательности простых идеалов $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$.

Задача 3.30. Найдите $\dim A$ в следующих случаях: $A = K$ — поле, $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}(\sqrt{m})$, $A = K[T]$, $A = \mathbb{Z}[T]$.