Листок 2

Определения $O(\cdot)$, $o(\cdot)$, $\Omega(\cdot)$, $\Theta(\cdot)$, $\sim$

1. $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$ означает, что существуют такая окрестность точки a и число C, что $|f(x)| \leq C|g(x)|$
2. $f(x) = \Omega(g(x))$ при $x \to a$ означает, что существуют такая окрестность точки a и число C, что $|f(x)| \geq C|g(x)|$ для всех x, лежащих в этой окрестности.
3. $f(x) = \Theta(g(x))$ при $x \to a$ означает, что и $f(x) = O(g(x))$, и $f(x) = \Omega(g(x))$.
4. $f(x) = o(g(x))$ означает, что $f(x) = g(x)\alpha(x)$, где $\alpha \to 0$ при $x \to a$.
5. $f(x) \sim g(x)$ означает, что $f(x) = g(x)(1+\alpha(x))$, где $\alpha \to 0$ при $x \to a$.

Если рассматриваются последовательности, то всегда предполагается, что $a = \infty$.

Далее используется обозначение $\ln x = \log_e x$. Про число e пока нужно знать только, что $e > 1$.

Теоремы, которыми можно пользоваться без доказательства

Теорема. $\ln(1+x) > x$ при $x \in (-1, +\infty)$.

Замечание. Если $\log_a(1+x) > x$ при $x \in (-1, +\infty)$, то $a = e$. Пока это никак не будет использоваться.

Основные задачи

Серия 1.

1.1. Пусть $f(x) \sim g(x)$. Докажите, что $f(x) - g(x) = o(f(x))$.

1.2. Пусть $p(x)$ — многочлен степени d. Докажите, что $p(x) = O(x^d)$.

1.3. Докажите следующие свойства для произвольной пары функций $f(x)$, $g(x)$

1. Для любых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ из $\alpha(x) = O(f(x))$ и $\beta(x) = O(g(x))$ следует $\alpha(x)+\beta(x) = O(f(x)+g(x))$. И наоборот, если $\gamma(x) = O(f(x)+g(x))$, то существуют такие функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, что $\alpha(x)+\beta(x) = \gamma(x)$, $\alpha(x) = O(f(x))$, $\beta(x) = O(g(x))$. Символически это записывается как $O(f(x)) + O(g(x)) = O(f(x)+g(x))$.

   Приведите точные утверждения и докажите их (или опровергните) для следующих символических записей.
2. $O(O(f(x)) = O(f(x))$.
3. $O(f(x))O(g(x)) = O(f(x))O(g(x))$.
4. $O(f(x)g(x)) = f(x)O(g(x))$.

5. $O(f)^2 + O(g)^2 = O(f+g)^2$.

1.4. Приведите пример пары монотонных последовательностей $f(n)$, $g(n)$, таких что $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$ и не выполнено ни одно из свойств $f(n) = O(g(n))$, $g(n) = O(f(n))$.

Серия 2.

2.1. Докажите, что

1. $n^\alpha = o(n^\beta)$ при $\alpha < \beta$.
2. $\ln n = o(n^\alpha)$, при $\alpha > 0$.
3. $\ln\ln n = o(\ln n)$.

2.2. Какая из функций растёт быстрее:

1. $n^{\ln n}$ или $(\ln n)^n$?
2. $n^{\ln\ln\ln n}$ или $\lfloor \ln n\rfloor!$?
3. $(n!)!$ или $((n-1)!)!(n-1)!^{n!}$?

2.3. Докажите следующие утверждения.

1. Если $T_n = O(T_{\lfloor n/2\rfloor})$, то $T_n = O(n^\alpha)$, где α — некоторое число.
2. Если $T_n = 2T_{\lfloor n/2\rfloor} + O(n)$, то $T_n = O(n\log_2 n)$.
3. Если $T_n = 2T_{\lfloor n/2\rfloor} + O(n^\alpha)$, где $\alpha < 1$, то $T_n = O(n)$.

2.4. Про функцию $f(x)$ известно, что $f(x) = O(1)$ при $x \to 0$. Какие из утверждений предыдущей задачи остаются верными при $x \to \infty$, если заменить последовательность T_n на функцию $f(x)$?

2.5. Про последовательность a_n известно, что

$$a_n = a_{n-1} + O(a_{n-1}^\alpha), \quad \text{где } \alpha < 1.$$

Докажите, что $a_n = O(n^{1/(1-\alpha)})$.

2.6. Про последовательность b_n известно, что $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$. Верно ли, что $b_n = o(2^n)$?

2.7. Сравните рост последовательностей c_n и d_n, заданных условиями $c_1 = d_1 = 1$, $c_{n+1} = c_n^2 + 2^n$, $d_{n+1} = d_n^2 + 9$.

2.8. Возрастающая последовательность $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ натуральных чисел такова, что суммы $a_i + a_j$ пар чисел из этой последовательности попарно различны. Докажите, что $a_n = \Omega(n^2)$.

2.9. Про последовательность p_n известно, что

$$n = (p_n/\ln p_n) + O(p_n/(\ln p_n)^2).$$

Найдите как можно более точное асимптотическое выражение для p_n.

Дополнительные задачи

Пусть $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$ обозначают соответственно множества всех рациональных и всех целых чисел. Зафиксируем простое число p. Пусть $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, $x = p^{\nu}(u/v)$, где числа ν, u и v целые (u и v не делятся на p). Положим $|x|_p = p^{-\nu}$ при $x \neq 0$, $|0|_p = 0$; если $x, y \in \mathbb{Q}$, положим $\rho_p(x, y) = |x - y|_p$ (это число называется *p-адическим расстоянием* между x и y).

3.1. Покажите, что ρ_p задаёт на $\mathbb{Q}$ структуру метрического пространства и, более того, удовлетворяет следующему *ультраметрическому неравенству:*

$$\rho_p(x, z) \leqslant \max(\rho_p(x, y), \rho_p(y, z)).$$

3.2. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность целых чисел. Когда она сходится к нулю в p-адической топологии?

Целыми p-адическими числами называются бесконечные *влево* числа, записанные в p-ичной системе счисления. В частности, слева может стоять бесконечный «хвост» из нулей, так что мы можем (и будем) рассматривать всякое натуральное число как целое p-адическое число. Множество целых p-адических чисел обозначается $\mathbb{Z}_p$. Сложение, вычитание и умножение в $\mathbb{Z}_p$ определяются обычным образом, по правилам сложения, вычитания и умножения «столбиком». Так как числа бесконечны влево, вычитание определено всегда (так что целые отрицательные числа также лежат в $\mathbb{Z}_p$). Для сложения, вычитания и умножения в $\mathbb{Z}_p$ выполнены обычные свойства (коммутативность, дистрибутивность и т. д.); доказательства этих свойств для умножения не совсем тривиальны, и мы их опустим (пока, по крайней мере).

3.3. Из сказанного выше следует, что число -1 можно рассматривать как элемент $\mathbb{Z}_7$. Как оно там записывается?

3.4. Если число $x \in \mathbb{Z}_p$ оканчивается ν нулями, положим $|x|_p = p^{-\nu}$. Если $x, y \in \mathbb{Z}_p$, положим $\rho_p(x, y) = |x - y|_p$. Покажите, что ρ_p задаёт на $\mathbb{Z}_p$ метрику, удовлетворяющую ультраметрическому неравенству, и что на $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ эта метрика индуцирует p-адическую метрику, введённую в задаче 3.1.

3.5. Сформулируйте и докажите критерий сходимости последовательности целых p-адических чисел.

3.6. Докажите, что в $\mathbb{Z}_p$ существует база окрестностей, являющихся открыто-замкнутыми множествами (см. предыдущий листок).

3.7. Докажите, что в $\mathbb{Z}_p$ верны обычные теоремы о пределе суммы, разности и произведения (см. предыдущий листок).

3.8. Докажите, что в $\mathbb{Z}_7$ существуют два квадратных корня из 2. Для каждого из них выпишите первые (или, вернее, «последние») цифры.

3.9*. Для каких еще $x \in \mathbb{Z}_7$ существует квадратный корень?