Листок 3

Основные задачи

Серия 1.

1.1. Про последовательности a_n и b_n известно, что $\overline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, b_n = 1$, $\underline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, b_n = -1$. Верно ли, что $\overline{\lim}\, a_n b_n = 1$?

1.2. Бывают ли бесконечные метрические пространства, не имеющие бесконечных компактных подмножеств?

1.3. Приведите пример такой ограниченной последовательности x_n, что $x_{n+1} - x_n \to 0$, а предел x_n не существует.

1.4. Через $C[0,1]$ обозначим пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, метрика на котором задана так

$$d(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Компактно ли $C[0,1]$?

Серия 2.

2.1. Докажите сходимость последовательности s_n, где

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

2.2. Приведите пример открытого покрытия интервала $(0,1)$, которое не содержит конечного подпокрытия.

2.3. Докажите критерий Коши для сходимости последовательности в $\mathbb{R}^n$: а) в L^2-метрике; б) в L^∞-метрике. (Одно из другого автоматически не следует: см. задачу 2.4.)

2.4. Приведите пример такого множества X с двумя метриками ρ_1 и ρ_2, задающими одну и ту же топологию, что X полно в метрике ρ_1, но не в метрике ρ_2.

2.5. Пусть $\tilde{C}[0,1]$ состоит из непрерывных на $[0,1]$ функций, все значения которых по модулю не превосходят единицы, а метрика на $\tilde{C}[0,1]$ задается той же формулой, что в задаче 1.4. Компактно ли $\tilde{C}[0,1]$?

2.6. Пусть c_n — произвольная последовательность положительных целых чисел. Докажите, что последовательность

$$a_0 = c_0;\ a_1 = c_0 + \frac{1}{c_1};\ a_2 = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2}};\ldots$$

сходится (предел этой последовательности называется бесконечной цепной дробью со знаменателями $\{c_n\}$).

2.7. Пусть в условиях предыдущей задачи, последовательность $\{c_n\}$ периодична. Докажите, что число $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

2.8. Докажите, что всякое число, являющееся корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, может быть получено конструкцией из предыдущей задачи.

2.9. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность действительных чисел и $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Положим $y_n = (x_1 + \ldots + x_n)/n$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

2.10. Приведите пример такой ограниченной последовательности x_n, что $x_{n+1} - x_n \to 0$, а последовательность y_n, где $y_n = (x_1 + \ldots + x_n)/n$, предела не имеет.

2.11. Пусть $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, $p_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $r_n = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$. Докажите, что $\lim s_n = \lim r_n = \lim p_n$ (все эти три предела равны числу e из листка 2, но доказывать это не требуется).

Дополнительные задачи

3.1. Покажите, что кольцо $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел полно в p-адической метрике.

3.2. Покажите, что $\mathbb{Z}_p$ является пополнением $\mathbb{Z}$ в p-адической метрике.

3.3. Дайте аккуратное доказательство коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности умножения в $\mathbb{Z}_p$.

3.4. Покажите, что целое p-адическое число $u \in Z_p$ обратимо в $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда, когда u не делится на p (или, что эквивалентно, когда последняя цифра в p-ичной записи числа u отлична от нуля).

3.5. *p-адическим числом* (на сей раз не обязательно целым) называется p-ичная дробь, у которой после запятой стоит не более чем конечное число знаков, а целая часть может быть бесконечна влево. Множество p-адических чисел обозначается $\mathbb{Q}_p$. Сложение и умножение в $\mathbb{Q}_p$ определяются по правилам действий «столбиком» (как и в $\mathbb{Z}_p$). Покажите, что $\mathbb{Q}_p$ является полем и, более того, полем частных $\mathbb{Z}_p$.

3.6. Покажите, что $\mathbb{Q}_p$ является пополнением $\mathbb{Q}$ в p-адической метрике.

3.7. Покажите, что последовательность $\{x_n \in \mathbb{Q}_p\}$ сходится тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$.

3.8. Докажите, что пространство X бесконечных последовательностей из нулей и единиц с тихоновской топологией (см. листок 1) является компактным.

3.9. Докажите, что пространство $\mathbb{Z}_p$ является компактным.

3.10. Гомеоморфны ли пространства $\mathbb{Z}_2$ и X? (Напоминание: два топологических пространства M и N называются гомеоморфными, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором открытым подмножествам M соответствуют открытые подмножества N, и наоборот.)