Листок 4

Последовательности a_n можно сопоставить *ряд* — формальную бесконечную сумму

$$a_1 + a_2 + \ldots + = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ .$$

Ряд сходится, если существует предел последовательности *частных сумм* $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. В этом случае этот предел называется *суммой ряда*. Если последовательность частных сумм расходится, то ряд называется *расходящимся*.

Аналогичные определения даются и для бесконечных произведений (задачи 2.8–2.9); если предел «частных произведений» равен нулю, то бесконечное произведение иногда тоже называют расходящимся.

Основные задачи

Серия 1.

1.1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim a_n = 0$; покажите на примере, что обратное неверно.

1.2. Пусть $|a_n| \leqslant b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

1.3. Пусть $a_n \geqslant b_n \geqslant 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Тогда и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

1.4. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$. Тогда сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ равносильна сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

Серия 2.

2.1. Исследовать сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ при всех вещественных значениях параметра p.

2.2. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, $a_n > 0$. Тогда и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ расходится.

2.3. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды с положительными членами, и пусть $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$. Покажите, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

2.4. (Признак Даламбера) Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положим $\alpha = \underline{\lim}|a_{n+1}/a_n|$, $\beta = \overline{\lim}|a_{n+1}/a_n|$. Докажите, что
а) если $\alpha > 1$, то ряд расходится;
б) если $\beta < 1$, то ряд сходится;
в) есть и сходящиеся, и расходящиеся ряды, для которых $\alpha \leqslant 1 \leqslant \beta$.

2.5. (Признак Коши) Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положим $\alpha = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n}$. Докажите, что
а) если $\alpha < 1$, то ряд сходится;
б) если $\alpha > 1$, то ряд расходится;
в) при любых $\alpha \leqslant 1 \leqslant \beta$ существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды.

2.6. Пусть последовательность частных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена, а последовательность b_n не возрастает и $\lim b_n = 0$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

2.7. Исследовать сходимость рядов

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n; \quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}; \quad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}.$$

2.8. Докажите, что при $0 < q < 1$ имеет место равенство

$$\frac{1-q}{1+q}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-q^4}{1+q^4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-q^8}{1+q^8}\right)^{\frac{1}{8}}\ldots = (1-q)^2.$$

2.9. Докажите равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p\text{ — простое}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

Дополнительные задачи

3.1. Покажите, что в поле $\mathbb{Q}_p$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (ср. задачу 1.1!).

Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in S}$ — семейство множеств, занумерованное элементами некоторого (вообще говоря, бесконечного) множества S. *Произведением* этого семейства называется множество всех наборов $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}$, где $x_\alpha \in X_\alpha$. Произведение обозначается $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$. Например, если $S = \mathbb{N}$ и $X_i = \{0,1\}$ для всех $i \in \mathbb{N}$, то $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ есть множество всех последовательностей из нулей и единиц, которое мы рассматривали в листке 1.

Пусть теперь все X_α — топологические пространства. Введем топологию на множестве $X = \prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ следующим образом: база открытых множеств — всевозможные подмножества вида $\prod_{\alpha\in S} U_\alpha$, где $U_\alpha \subset X_\alpha$ — открытые подмножества и *для всех α, кроме, быть может, конечного числа, имеем $U_\alpha = X_\alpha$.*

3.2. Проверьте, что вышеописанное семейство подмножеств действительно является базой открытых множеств некоторой топологии. Проверьте также, что, если $S = \mathbb{N}$, $X_i = \{0,1\}$ для всех i и на множестве $\{0,1\}$ задана дискретная топология, то топология произведения на пространстве $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ последовательностей из нулей и единиц совпадает в введенной в листке 1 топологией Тихонова.

3.3. Пусть все X_α хаусдорфовы; покажите, что пространство $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ также хаусдорфово.

3.4. Пусть опять X_α — произвольные множества и $X = \prod_{\alpha\in S} X_\alpha$. Тогда задать отображение $f\colon Y \to X$ — все равно, что задать набор отображений $\{f_\alpha\colon Y \to X_\alpha\}_{\alpha\in S}$. Покажите, что, если все X_α — топологические пространства и на X задана топология произведения, то отображение $f\colon Y \to X$ напрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все отображения $f_\alpha\colon Y \to X_\alpha$.

3.5*. Пусть все X_α хаусдорфовы и компактны; покажите, что пространство $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ также компактно.

Пусть p — простое число; каждому целому p-адическому числу x сопоставим набор элементов $x_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, определенных так: x_n — вычет по модулю p^n целого числа, образованного последними n цифрами числа x. Тем самым определено отображение $j\colon \mathbb{Z}_p \to \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

3.6. Покажите, что j — вложение (то есть: если $j(x) = j(y)$, то $x = y$).

3.7. Пользуясь отображением j из предыдущей задачи, отождествим $\mathbb{Z}_p$ с подмножеством в $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Покажите теперь, что, если на каждом $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ задана дискретная топология, то топология произведения на $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ индуцирует p-адическую топологию на $\mathbb{Z}_p$.

3.8. Покажите, что последовательность $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ из $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ лежит в $j(\mathbb{Z}_p)$ (см. задачу 3.6) тогда и только тогда, когда $x_{i+1} \equiv x_i \pmod{p^i}$ для всех $i \in \mathbb{N}$.