Листок 5

Основные задачи

Серия 1.

1.1. Пусть последовательности функций f_n и g_n равномерно сходится на $\mathbb{R}$. Верно ли, что последовательность $f_n g_n$ сходится равномерно?

1.2. Пусть S_n — вложенная ($S_n \supset S_{n+1}$) последовательность замкнутых подмножеств отрезка $[0,1]$. Докажите, что $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} S_n \neq \emptyset$.

1.3. Функция Дирихле $D(x)$ равна 1 для рациональных x и 0 для иррациональных. Можно ли представить $D(x)$ как равномерный предел ступенчатых функций?

1.4. Функция f, заданная на $\mathbb{R}$, для всех x и y удовлетворяет условию $|f(x)-f(y)| \leq (x-y)^2$. Докажите, что f — постоянная.

Серия 2.

2.1. а) Сходится ли равномерно на $[0,1]$ последовательность функций $f_n = (1+x^n)/(1+x^{2n})$?

б) Тот же вопрос для последовательности $g_n = (1+x^{2n-1})/(1+x^{2n})$.

2.2. Докажите, что всякая неубывающая функция на отрезке есть равномерный предел ступенчатых.

Рассмотрим последовательность f_n функций, заданных на отрезке $[a,b]$, такую что в каждой точке отрезка последовательность значений сходится, обозначим $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

2.3. Пусть f_n — многочлены степени d. Докажите, что f — многочлен степени не выше d.

2.4. Приведите пример последовательности, для которой все f_n непрерывны на $[a;b]$, а f — нет.

2.5. Пусть f_n — неубывающая последовательность непрерывных функций ($f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ для всех $x \in [a,b]$ и $n \in \mathbb{N}$), $f(x)$ — непрерывна. Докажите, что f_n сходится равномерно.

2.6. Пусть f_n — последовательность неубывающих функций, $f(x)$ — непрерывна. Докажите, что f_n сходится равномерно.

2.7. Приведите пример неубывающей последовательности неубывающих функций на отрезке, которая не сходится равномерно.

2.8. Функция f удовлетворяет уравнению $f' = f^2 - 1$. Может ли она иметь локальные экстремумы?

2.9. Пусть f — дифференцируемая 2000 раз функция, и пусть $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(1999)}(a) = 0$, а $f^{(2000)}(a) < 0$. Докажите, что точка a является локальным максимумом функции f.

2.10. Положим $f(x) = e^{-1/x^2}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Докажите, что эта функция бесконечно дифференцируема (в том числе и в нуле) и что все ее производные в нуле обращаются в нуль. Тем самым у нас имеется пример непостоянной функции, у которой все производные в точке локального экстремума обращаются в 0.

Дополнительные задачи

Пусть K — произвольное поле. *Абсолютным значением* на K называется функция $x \mapsto \|x\|$ из K во множество неотрицательных вещественных чисел, удовлетворяющая таким условиям: $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\|x\| = 0$, $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y|$. Примеры: $x \mapsto |x|$ на поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$; p-адическая норма на $\mathbb{Q}_p$.

Абсолютное значение индуцирует на поле метрику $\rho(x, y) = \|x - y\|$, а тем самым и топологию.

3.1. Покажите, что абсолютное значение $\|\cdot\|$ индуцирует дискретную топологию тогда и только тогда, когда $\|x\| = 1$ при всех $x \neq 0$. (Указание: рассмотрите $\lim_{n\to\infty} x^n$.)

3.2. Абсолютное значение $\|\cdot\|$ называется *ультраметрическим,* если для него выполнено неравенство $\|x + y\| \leqslant \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Покажите, что абсолютное значение ультраметрично тогда и только тогда, когда существует такое $M \geqslant 0$, что $\|n \cdot 1_K\| \leqslant M$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (здесь $1_K \in K$ — единица поля K. (В частности, на поле конечной характеристики *любое* абсолютное значение ультраметрично!) (Указание: рассмотрите $\|(x + y)^n\|$.)

3.3. Покажите, что два абсолютных значения $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ индуцируют на поле K одну и ту же топологию тогда и только тогда, когда существует такое число $\alpha > 0$, что $\|x\|_2 = \|x\|_1^\alpha$ для всех x. (Указание: покажите, что $(\|x\|_1 < 1) \Leftrightarrow (\|x\|_2 < 1)$.) Можете пользоваться любыми изветсными Вам свойствами показательной и логарифмической функций.

3.4. а) Пусть абсолютные значения $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ индуцируют на поле K *различные* топологии; введем на множестве $K \times K$ топологию произведения, в которой топология на первом сомножителе происходит из $\|\cdot\|_1$, а на втором — из $\|\cdot\|_2$. Покажите, что подмножество $\Delta \subset K \cdot K$, состоящее из точек вида $(x; x)$, плотно в $K \times K$ (то есть $\bar{\Delta} = K \times K$).

б) Обобщите результат предыдущей задачи на случай n абсолютных значений, задающих попарно различные топологии.