Листок 6

Основные задачи

Серия 1.

1.1. Вычислите $f^{(43)}(0)$ для $f(x) = \sin(x^{13} + x^{15})$.

1.2. Сколько раз дифференцируема функция

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 0; \\ \sin^3 x, & x > 0? \end{cases}$$

1.3. В малой окрестности 0 сравните $\sin(x + x^3)$ и $\sin x + \sin^3 x$.

1.4. Найдите первые два ненулевых члена в разложении в ряд Тейлора в окрестности 0 для функций

а) $\cos(\sin x)$, б) $(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$,
в) $(\frac{1}{2} - x)\log_2(\frac{1}{2} - x) + (\frac{1}{2} + x)\log_2(\frac{1}{2} + x)$, г) $e^{\sin x}$.

Серия 2.

2.1. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}(\sin \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} \sin x)/x^7$.

2.2. Выразите с точностью 0.1% длину хорды, стягивающей в единичной окружности дугу α, многочленом от α при а) $\alpha < 0.1$; б) $\alpha < 0.2$; в) $\alpha < 0.3$.

2.3. Получите при $x \to \infty$ разложение вида

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{x} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^3} + o(x^{-3}).$$

2.4. Напишите разложение в ряд Тейлора в окрестности 0 для функций

а) $e^{\alpha x}\sin \beta x$, б) $\operatorname{arctg} x$, в) $\dfrac{1}{(1-x)(2-x)}$, г) $\dfrac{1}{(1-x)^a}$, д) $\arcsin x$.

2.5. Пусть f, g — аналитические функции, $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = g'(0) = 1$, $\varphi(x) = f^{(-1)}(x)$, $\psi(x) = g^{(-1)}(x)$ (существуют в окрестности 0). Докажите, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - g(x)}{\varphi(x) - \psi(x)} = 1.$$

2.6. Пусть $\xi(\varepsilon)$ — наименьший положительный корень уравнения $\cos x = (1+\varepsilon)x$. Найдите $\xi(\varepsilon)$ в окрестности 0 с точностью до $o(\varepsilon^2)$.

2.7. Пусть $\eta(\varepsilon)$ — наименьший положительный корень уравнения $\sin x = (1-\varepsilon)x$. Найдите $\eta(\varepsilon)$ в окрестности 0 с точностью до а) $o(\varepsilon)$; б) $o(\varepsilon^2)$.

2.8. Найдите три ненулевых члена асимптотического разложения в 0 для корня $x(p)$ уравнения $x^5 + x = p$.

2.9. Получите для корней уравнения $\sin x = 1/x$ асимптотику вида

$$x_n = \pi n + \frac{A}{n^\alpha} + \frac{B}{n^\beta} + o(n^{-\beta}),\ n \to \infty \quad A \neq 0, B \neq 0.$$

2.10. Пусть $\varphi(x) = 3x^2 - 2x^3$. Последовательность x_k определена рекуррентной формулой $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Пусть $x_0 \geq (1/2) + (1/2n)$. Докажите, что

1) последовательность x_k монотонно возрастает;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 1$;

3) члены последовательности отличаются от 1 менее чем на 2^{-n} после $O(\log n)$ шагов.

2.11. Запишем разложение в 0 для $\operatorname{tg} x$ (нечетной функции) в виде

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Докажите, что числа p_n удовлетворяют соотношениям

$$p_0 = 1, \quad p_{r+1} = \sum_{n+k=r} \binom{2r+2}{2n+1} p_n p_k,\ \text{при } r \geq 1.$$

Найдите p_1, p_2, p_3.

Дополнительные задачи

Пусть множество S состоит из всех простых чисел и символа ∞. Если договориться, что $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$, то для всякого $v \in S$ определено, что такое $\mathbb{Q}_v$. *Кольцом аделей* называется множество последовательностей $\{x_v \in \mathbb{Q}_v\}_{v\in S}$, удовлетворяющих следующему свойству: $x_p \in \mathbb{Z}_p$ для всех, кроме, быть может, конечного числа простых чисел p. Множество аделей обозначается $\mathbb{A}$ (точнее, $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$).

3.1. Поскольку $\mathbb{Q}$ естественно вложено в каждое из $\mathbb{Q}_v$, где $v \in S$, определено отображение $i\colon \mathbb{Q} \to \prod_{v\in S} \mathbb{Q}_v$, переводящее x в набор $\{x_v\}$, где x_v — число x, рассматриваемое как элемент Q_v. Ясно, что i — вложение; покажите, что $i(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{A}$.

3.2. Введем на множестве аделей топологию следующим образом: базис открытых множеств — множества вида $\prod_{v\in S} U_v$, где каждое U_v открыто в $\mathbb{Q}_v$ и для всех, кроме, быть может, конечного числа простых чисел p имеем $U_p = \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$. Покажите, что эта топология индуцирует дискретную топологию на $i(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{A}$.

3.3. Зафиксируем простое число l и положим $S' = S \setminus \{l\}$. Определим множество $\mathbb{A}'$, топологию на нем и отображение $i'\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{A}'$, заменяя всюду в предшествующих определениях S на S'. Покажите, что замыкание множества $i'(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{A}'$ совпадает со всем $\mathbb{A}'$.