Лекция 1. Пределы и непрерывность

В школьном курсе вам объясняли на интуитивном уровне, что такое предел и непрерывная функция. Мы начнем наш курс с того, что определим общие (хотя и не максимально общие) понятия предела и непрерывности. Первый шаг к этому — следующее

Определение 1.1. *Топологическим пространством* называется множество X, в котором выделено семейство подмножеств, называемых *открытыми,* удовлетворяющее следующим условиям:

1) Само пространство X и пустое подмножество $\varnothing$ являются открытыми множествами.

2) Объединение любого семейства открытых множеств открыто.

3) Пересечение двух открытых множеств открыто.

Приведем примеры топологических пространств.

Пример 1.2 (дискретная топология). Пусть X — произвольное множество. Объявим *все* его подмножества открытыми. Тогда, очевидно, аксиомы топологического пространства будут выполнены. Такое топологическое пространство называется *пространством с дискретной топологией.*

Сами по себе дискретные топологии неинтересны, но такое топологическое пространство может возникнуть в результате проведения какой-то конструкции, и вот на этот случай полезно иметь для него специальный термин. Отметим еще, что, ввиду аксиомы 2 топологических пространств, для дискретности пространства достаточно, чтобы все его точки были открыты.

В дальнейших примерах мы будем часто использовать множество $\mathbb{R}$ действительных чисел. Что-то про действительные числа вы знаете из школы (например, то, что это — бесконечные десятичные дроби); строгую теорию действительных чисел мы разовьем чуть позже; порочного круга при этом не будет, так как до строгого определения действительные числа будут у нас появляться только в примерах.

Начнем с того, что введем топологию на самом множестве $\mathbb{R}$:

Пример 1.3 (стандартная топология на $\mathbb{R}$). Назовем подмножество $U \subset \mathbb{R}$ открытым, если оно удовлетворяет следующему условию: для каждой точки $x \in U$ существует (действительное) число $\varepsilon > 0$ такое, что все y, удовлетворяющие условию $|y - x| < \varepsilon$, также лежат в U.

Неформально говоря, множество открыто, если вместе с каждой точкой оно обязательно содержит и все достаточно близкие к ней. Проверьте самостоятельно, что при таком определении открытых множеств аксиомы 1–3 топологического пространства действительно выполнены.

Много разумных примеров топологических пространств получается из следующей конструкции:

Определение 1.4. *Метрическим пространством* называется множество X, на парах точек которого задана функция ρ (с вещественными значениями), удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\rho(x,y) \geqslant 0$ для любых x и y, и $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.

3) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Величина $\rho(x,y)$ называется *расстоянием* между x и y, а сама функция ρ часто называется *метрикой.*

Пример метрического пространства — множество $\mathbb{R}$, в котором метрика задана формулой $\rho(x,y) = |x-y|$. Другие примеры — пространство или плоскость, в котором ρ — обычное расстояние между точками. В этих примерах аксиома 3 сводится к обычному «неравенству треугольника»; в общем случае ее тоже называют неравенством треугольника.

Коль скоро X — метрическое пространство, то на любом подмножестве $Y \subset X$ функция ρ также индуцирует метрику, так что любое подмножество метрического пространства автоматически является метрическим пространством.

Рассмотрим дальнейшие примеры. Пусть $\mathbb{R}^n$ — множество упорядоченных наборов из n действительных чисел («координат») $(x_1, \ldots, x_n)$; это множество называется *n-мерным координатным пространством* (или просто n-мерным пространством, если не грозит путаница). При $n = 2$ это плоскость, при $n = 3$ — «обычное» (трехмерное) пространство. На $\mathbb{R}^n$ можно ввести (среди прочих) такие метрики:

L^2-метрика: если $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$, то положим $\rho_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$.

L^∞-метрика: если $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$, то положим $\rho_\infty(x,y) = \max(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, \ldots, |x_n-y_n|)$.

Для L^∞-метрики проверка аксиом метрического пространства проста; проведите ее самостоятельно. Для L^2-метрики доказательство неравенства треугольника не совсем тривиально; вы узнаете его из курса алгебры.

На каждом метрическом пространстве можно естественным способом ввести топологию. Сначала —

Обозначение 1.5. Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ; тогда для точки $x \in X$ и числа $\varepsilon > 0$ положим

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$

Множество $B_\varepsilon(x)$ называется *открытым шаром* с центром x и радиусом ε.

А теперь определим, наконец, топологию на метрическом пространстве:

Определение 1.6. Пусть X — метрическое пространство. Подмножество $U \subset X$ называется открытым, если для всякой точки $x \in U$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Проверьте самостоятельно, что так определенный набор открытых множеств удовлетворяет аксиомам топологического пространства; проверьте также, что открытый шар в метрическом пространстве является открытым множеством, и тем самым такое употребление слова «открытый» не является двусмысленным (для этого придется воспользоваться неравенством треугольника). Проверьте, наконец, что топология, задаваемая на $\mathbb{R}$ метрикой, совпадает со стандартной топологией.

Различные метрики могут задавать одну и ту же топологию на данном множестве X. Вот важный пример.

Пример 1.7. L^2-метрика и L^∞-метрика задают на $\mathbb{R}^n$ одну и ту же топологию.

Доказательство. Легко видеть, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства

$$\rho_\infty(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant \sqrt{n} \cdot \rho_\infty(x, y).$$

Пусть теперь U — открытое множество в L^2-топологии, тогда оно будет открыто и в L^∞-топологии: если $x \in U$ и $B_{\varepsilon,\rho_2}(x) \subset U$, то и подавно $B_{\varepsilon,\rho_\infty}(x) \subset U$. Обратно, если U открыто в L^∞-топологии, и если для $x \in U$ имеем $B_{\varepsilon,\rho_\infty}(x) \subset U$, то $B_{\varepsilon/\sqrt{n},\rho_2}(x) \subset U$, так что U открыто и в L^2-топологии. □

Чтобы задать на множестве топологию, не обязательно перечислять все открытые множества. На практике часто используется следующий способ:

Определение 1.8. *Базой открытых множеств* на множестве X называется семейство его подмножеств, обладающее следующим свойством:

если $V_1 \subset X$ и $V_2 \subset X$ принадлежат базе, то $V_1 \cap V_2$ является объединением некоторого (может быть, бесконечного) семейства множеств из базы.

Если на множестве X задана база открытых множеств, то *топология, заданная с помощью этой базы* определяется так: открытыми множествами объявляются подмножества $U \subset X$, представимые в виде объединения некоторого (возможно, бесконечного) семейства множеств из базы, а также $\varnothing$ и всё X.

Проверьте самостоятельно, что описанная конструкция действительно задает топологию на X; проверьте также, что в метрическом пространстве X с метрикой ρ множества вида $B_\varepsilon(x)$ при всевозможных $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ образуют базу открытых множеств, и что топология, заданная с помощью этой базы, совпадает с топологией, заданной метрикой. Более того, достаточно рассматривать только множества $B_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon < 1$ (или, скажем, $\varepsilon < 1/1999$): они также образуют базу открытых подмножеств, и эти базы задают все ту же топологию.

Проверьте также, что стандартную топологию на $\mathbb{R}$ можно задать с помощью базы открытых множеств вида $(p;q)$, где p и q — рациональные числа.

Приведем два примера, в которых топология задается без помощи метрики.

Пример 1.9 (треугольники на плоскости). Пусть T — множество треугольников на плоскости (мы рассматриваем треугольник просто как геометрическую фигуру, без учета порядка вершин). Введем на нем топологию. Как водится, подмножество $U \subset T$ будет открытым если, неформально говоря, вместе с каждым треугольником оно содержит все «близкие» к нему. Формализуется это следующим образом. Для каждого треугольника $\Delta \in T$ и каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество $U(\Delta, \varepsilon) \subset T$, состоящее из всех треугольников Δ', обладающих следующим свойством: вершины треугольников Δ и Δ' можно занумеровать так, что расстояния между вершинами треугольников Δ и Δ' с одинаковыми номерами будут всё́ меньше ε. Проверьте самостоятельно, что множества вида $U(\Delta, \varepsilon)T$ образуют базу открытых подмножеств; определяемая ей топология — это и есть та топология на пространстве треугольников, которую мы хотели ввести.

Пример 1.10 (расширенные натуральные числа). Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел (стандартное обозначение) и $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (иными словами, X — множество натуральных чисел, к которому добавлен символ ∞ — «бесконечность»). Введем топологию на $\bar{\mathbb{N}}$ следующим образом: подмножество $U \subset \bar{\mathbb{N}}$, содержащее ∞, объявим открытым тогда и только тогда, когда существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что все натуральные числа $n \geqslant N$ лежат в U; кроме

того, объявим открытыми *все* подмножества $\bar{\mathbb{N}}$, не содержащие ∞. Проверьте самостоятельно, что при этом действительно получается топология.

Теперь введем, наконец, два основных определения.

Определение 1.11. Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если для всякого открытого подмножества $V \ni f(x)$ существует открытое подмножество $U \ni x$ такое, что $f(U) \subset V$.

Определение 1.12. Пусть X и Y — топологические пространства, $a \in X$, и f — отображение из X в Y или из $X \setminus \{a\}$ в Y. Говорят, что точка $b \in Y$ является *пределом* f *при* x, *стремящемся к* a, если функция $\tilde{f}\colon X \to Y$, определенная по правилу

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq a; \\ b, & z = a. \end{cases}$$

является непрерывной в точке a. Обозначение:

$$b = \lim_{x \to a} f(x).$$

Это определение включает в себя и предел функции, и предел последовательности. Вот, например, как получается предел последовательности. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ топологического пространства Y (если тяжело, можете считать, что $Y = \mathbb{R}$) можно рассматривать как функцию $f\colon \mathbb{N} \to Y$ (именно, $f(n) = x_n$). Если рассмотреть $\mathbb{N}$ как $\bar{\mathbb{N}} \setminus \{\infty\}$, то запись $\lim_{n\to\infty} x_n$ полностью укладывается в наше определение предела; обязательное упражнение — проверить, что при этом получится обычное определение предела последовательности (если, конечно, рассматривать на $\bar{\mathbb{N}}$ топологию, введенную в примере 1.10). Заметим еще, что значение функции f в точке a никак не влияет на предел этой функции при x, стремящемся к a; по этой же причине в определении предусмотрено, что f может быть вообще не определена в a (случай, когда f — отображение из $X \setminus \{a\}$ в Y).