Лекция 2. Простейшие свойства топологических пространств

В этой лекции нет трудных теорем. Ее цель — приучить вас к определенному языку, который будет активно использоваться в дальнейшем. Как писал по сходному поводу американский математик С. Ленг в своей заслуженной известной книге «Алгебра», «главная трудность для начинающего состоит в овладении разумным словарным запасом за короткое время». Большинство доказательств чрезвычайно просты; провести их самостоятельно, как правило, проще, чем разбирать написанное в тексте лекции.

Определение 2.1. Пусть X — топологическое пространство. Подмножество $F \subset X$ называется *замкнутым,* если его дополнение $X \setminus F \subset X$ открыто.

Следующее утверждение мгновенно вытекает из определения 1.1.

Предложение 2.2. *Пусть X — топологическое пространство. Тогда:*

1) *Само пространство X и пустое подмножество $\varnothing$ являются замкнутыми множествами.*

2) *Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.*

3) *Объединение двух замкнутых множеств замкнуто.*

Можно дать равносильное определение топологического пространства как множества X, в котором выделен набор подмножеств, называемых замкнутыми, для которых выполнены условия (1)–(3) из предложения 2.2. Открытыми подмножествами тогда по определения будут дополнения замкнутых.

Определение 2.3. Пусть X — топологическое пространство и $M \subset X$ — произвольное подмножество. Тогда *замыканием* множества M называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих M.

Замыкание множества M обычно обозначается $\bar{M}$. Ввиду пункта (2) предыдущего предложения замыкание любого множества будет замкнуто.

Неформальный смысл понятия замыкания таков: при переходе от множества M к его замыканию $\bar{M}$ мы добавляем к множеству M все те точки x, которые сами в M не лежат, но, тем не менее, «сколь угодно близко от x» точки множетсва M имеются; если таких точек x не найдется, то множество M является замкнутым.

Точный смысл предыдущему абзацу придает следующее

Предложение 2.4. *Пусть X — топологическое пространство и $M \subset X$. Тогда $\bar{M}$ состоит из всех точек $x \in X$, обладающих следующим свойством:*

$$\text{Для всякого открытого подмножества } U \ni x \text{ имеем } U \cap M \neq \varnothing. \qquad (*)$$

Доказательство. Пусть $x \in \bar{M}$; по определению, это равносильно тому, что для всякого замкнутого множества $F \supset M$ имеем $F \ni x$. Поскольку замкнутые множества — это дополнения открытых, последнее условие можно, обозначая $U = X \setminus F$, переписать так: для всякого открытого подмножества $U \subset X$ такого, что $U \cap M = \varnothing$, имеем $U \not\ni x$, или, эквивалентно: если открытое множество U содержит x, то $U \cap M \neq \varnothing$. Но это и есть условие $(*)$. □

Теперь докажем одно простое, но важное утверждение про непрерывность.

Предложение 2.5. *Пусть X и Y — топологические пространства и $f\colon X \to Y$ — отображение. Тогда f непрерывно во всех точках $x \in X$ тогда и только тогда, когда для любого открытого подмножества $V \subset Y$ его проообраз $f^{-1}(V) \subset X$ также открыт.*

Доказательство. «Только тогда»: пусть $V \subset Y$ открыто, покажем, что $f^{-1}(V)$ открыто. В самом деле, пусть $x \in f^{-1}(V)$. Так как f непрерывна в точке x, согласно определению 1.11 найдется такое открытое подмножество $U_x \subset X$, что $U_x \ni x$ и $f(U_x) \subset V$ — иниыми словами, $U_x \subset f^{-1}(V)$. Стало быть, $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$. Поскольку все множества U_x открыты и объединение любого семейства открытых множеств также открыто, получаем, что $f^{-1}(V)$ открыто, что и требовалось.

«Тогда»: пусть прообразы всех открытых множеств открыты, покажем, что f непрерывна в каждой точке $x \in X$. В самом деле, пусть $V \ni f(x)$; тогда множество $U = f^{-1}(V)$ открыто, содержит x, и $f(U) \subset V$. □

Определение 2.6. Отображения, удовлетворяющие эквивалентным условиям предложения 2.5, называются *непрерывными* отображениями из X в Y.

Следующее простое, но важное понятие — индуцированная топология.

Определение 2.7. Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$ — подмножество. Введем на Y топологию, объявив его открытыми подмножествами все множества вида $U \cap Y$, где U — открытое подмножество пространства X. Получающаяся топология называется топологией на Y, *индуцированной* с топологии на X.

Вам предоставляется провести (тривиальную) проверку того, что набор подмножеств Y, построенный в соответствии с этим определением, удовлетворяет аксиомам открытых множеств топологического пространства.

Пример 2.8. Пусть $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ — множество целых чисел (обозначение $\mathbb{Z}$ является стандартным). Тогда стандартная топология на $\mathbb{R}$ индуцирует на $\mathbb{Z}$ дискретную топологию (проверьте самостоятельно).

Наша следующая тема — отделимость.

Определение 2.9. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым* (или *отделимым*), если для любых двух различных точек $x, y \in X$ существуют такие открытые подмножества $U \ni x$ и $V \ni y$, что $U \cap V = \varnothing$.

Предложение 2.10. *Всякое метрическое пространство хаусдорфово.*

Доказательство. Пусть X — метрическое пространство и $x, y \in X$ — две его различные точки. Положим $d = \rho(x, y)$. Тогда открытые шары $B_{d/2}(x)$ и $B_{d/2}(y)$ содержат x и y соответственно и не пересекаются: в самом деле, если бы точка z принадлежала обоим шарам, то мы имели бы

$$d = \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z) < d/2 + d/2 = d,$$

что нелепо. □

Все топологические пространства, с которыми мы будем иметь дело в нашем курсе, будут хаусдорфовыми. Глупый пример нехаусдорфового пространства придумать нетрудно (топологическое протсранство — понятие очень общее, под его определенеие подходит, в том числе, и много малоинтересных объектов). Тем не менее, нехаусдорфовы пространства в жизни тоже встречаются; приведем, на прощание с неклассическими топологиями, важный

Пример 2.11 (топология Зарисского). Введем на $\mathbb{R}^n$ топологию следующим образом: замкнутыми множествами объявим множества решений всевозможных (в том числе бесконечных) систем уравнений вида $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где все f_α — многочлены[1].

Проверим выполнение аксиом для замкнутых множеств. Разумеется, $\varnothing$ и $\mathbb{R}^n$ замкнутыми множествами будут (рассмотрите уравнения $1 = 0$ и $0 = 0$); то, что пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто, такде очевидно. Чтобы установить, что объединение замкнутого множества F, заданного системой $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0$, и замкнутого

[1] Из «теоремы Гильберта о базисе» вытекает, что всякая бесконечная система уравнений вида $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0$ равносильна конечной системе; доказательство несложно, но в курсе анализа ему не место.

множества G, заданного системой $g_\beta(x_1, \ldots, x_n) = 0$, также замкнуто, надо заметить, что $F \cup G$ задается системой уравнений $f_\alpha g_\beta = 0$ (при всевозможных сочетаниях α и β) — проверьте это самостоятельно.

Теперь покажем, что топология Зарисского нехаусдорфова; мало того: в топологии Зарисского любые два непустых открытых множества пересекаются! В самом деле, пусть $U_1 = \mathbb{R}^n \setminus F_1$ и $U_2 = \mathbb{R}^n \setminus F_2$ — непустые открытые множества; неравенство $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ равносильно тому, что $F_1 \cup F_2 \neq \mathbb{R}^n$. Пусть f_1 и f_2 — не являющиеся тождественным нулем многочлены, входящие в системы уравнений, задающие F_1 и F_2 соответственно. Если $F_1 \cup F_2 = \mathbb{R}^n$, то и подавно объединение множеств нулей многочленов f_1 иЁf_2 равно $\mathbb{R}^n$. Иными словами, не являющийся тождественным нулем многочлен $f_1 f_2$ зануляется всюду на $\mathbb{R}^n$, что невозможно.

Вернемся теперь к хаусдорфовым пространствам. Чтобы продемонстрировать, как работает понятие отделимости, докажем, что в хаусдорфовых пространствах при определенных условиях имеет место единственность предела. Сначала

Определение 2.12. Пусть X — топологическое протсрантсво. Точка $x \in X$ называется *изолированной,* если множество $\{x\}$ открыто.

Неформально говоря, точка изолирована, если «поблизости от нее» других точек нет. Например, пространство дискретно тогда и только тогда, когда все его точки изолированы.

Предложение 2.13. *Пусть X и Y — топологические пространства; предположим, что пространство Y хаусдорфово и что $a \in X$ — неизолированная точка. Тогда для всякого отображения $f\colon X \setminus \{a\} \to Y$ предел $\lim_{x \to a} f(x)$ единствен (если он существует).*

Доказательство. Пусть, от противного, пределом $f(x)$ при x, стремящемся к a, будут две разные точки b_1 и b_2. Поскольку Y хаусдорфово, в нем существуют непересекающиеся открытые множества $V_1 \ni b_1$ и $V_2 \ni b_2$. Согласно определению предела, в пространстве X существуют открытые подмножества U_1 и U_2, содержащие a, такие, что $f(U_1 \setminus \{a\}) \subset V_1$ и $f(U_2 \setminus \{a\}) \subset V_2$. Так как точка a неизолирована, открытое множество $U_1 \cap U_2$ содержит по крайней мере одну точку $a' \neq a$. Тогда $f(a') \in V_1 \cap V_2$, что противоречит тому, что V_1 и V_2 не пересекаются. □