Дополнение к лекции 2

Следующий факт выпал из записок лекции 2:

Предложение 2.14. *Пусть X — метрическое пространство и $M \subset X$ — подмножество. Тогда его замыкание $\bar{M} \subset X$ состоит из всех пределов последовательностей, все элементы которых лежат в M.*

Доказательство. Пусть N — множество пределов последовательностей из элементов множества M. Сначала покажем, что $\bar{M} \subset N$, а затем, что $N \subset \bar{M}$.

$\bar{M} \subset N$: пусть $x \in \bar{M}$. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ шар $B_{1/n}(x)$ имеет непустое пересечение с M; выберем в этом пересечении точку (произвольным образом) и обозначим ее x_n. Поскольку $\rho(x_n, x) < 1/n$, имеем $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, так что $x \in N$.

$N \subset \bar{M}$: Пусть $x \in N$, тогда $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, где $x_n \in M$ для всех n. По определению предела, для всякого открытого множества $U \ni x$ найдется (и не одно!) число n такое, что $x_n \in U$; стало быть, $U \cap M \neq \varnothing$, откуда $x \in \bar{M}$. □

Лекция 3. Действительные числа

В этой лекции мы построим наконец строгую теорию действительных чисел. Мы будем предполагать известными свойства рациональных чисел и действий над ними. Множество рациональных чисел будет обозначаться $\mathbb{Q}$ (общепринятое обозначение).

Определение 3.1. *Сечением* (или дедекиндовым сечением) называется подмножество $M \subset \mathbb{Q}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $M \neq \mathbb{Q}$.

2) Если $p \in M$ и $q < p$, то $q \in M$.

3) Во множестве M нет наибольшего элемента.

Пример 3.2. Пусть r — рациональное число. Обозначим через M_r множество всех рациональных чисел, меньших r. Тогда, очевидно, множество M_r является сечением.

Итак, каждому рациональному числу мы сопоставили некоторое сечение (и ясно, что при этом разным рациональным числам соответствуют разные сечения). Однако же кроме сечений вида M_r, где $r \in \mathbb{Q}$, есть и другие:

Пример 3.3. Определим подмножество $M \subset \mathbb{Q}$ так:

$$M = \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r \leqslant 0 \text{ или } r \geqslant 0 \text{ и } r^2 < 2 \right\}.$$

Покажем, что множество M является сечением. В самом деле, выполнимость свойств (1) и (2) очевидна. Проверим свойство (3). Итак, пусть $r \in M$; нам надо найти число $r' > r$ такое, что $r' \in M$. Если $r \leqslant 0$, все ясно (можно, например, взять $r' = 1$). Пусть $r > 0$. Будем искать r' в виде $r + h$, где h — положительное рациональное число. Нам известно, что $r^2 < 2$; чтобы обеспечить выполнение неравенства $(r+h)^2 < 2$, оценим это число сверху. Будем выбирать h так, чтобы было $h < 1$ (ясно, что это ничему не мешает):

$$(r+h)^2 = r^2 + 2rh + h^2 \leqslant r^2 + 2 \cdot 2h + h = r^2 + 5h$$

(мы учли, что неравенство $r^2 < 2$ влечет $r < 2$ и что $h^2 < h$ при $0 < h < 1$). Если теперь выбрать h так, чтобы $0 < h < (2 - r^2)/5$, то ясно, что неравенство $(r+h)^2 < 2$ будет выполнено.

Теперь можно дать одно из основных определений этой лекции.

Определение 3.4. *Действительным числом* (синоним: вещественное число) называется сечение. Множество действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$.

К этому определению необходимы комментарии. Во-первых, для всякого рационального числа $r \in \mathbb{Q}$ мы определили соответствующее ему сечение M_r; это соответствие определяет вложение $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$, а сечения вида M_r будут у нас играть роль рациональных чисел. A posteriori окажется, что сечение, соответствующее действительному числу α, — это множество рациональных чисел, меньших α (в частности, сечение M из примера 3.3 есть не что иное, как число $\sqrt{2}$), но чтобы иметь право так говорить, надо сначала определить, что такое действительное число! Во-вторых, хотя, формально говоря, всякое действительное число — это сечение, то есть удовлетворяющее определенным условиям подмножество множества $\mathbb{Q}$, мы будем тем не менее обозначать действительные числа так, как и принято обозначать числа, в частности, строчными латинскими и греческими буквами. Если же нам понадобится подчеркнуть природу действительного числа α как подмножества $\mathbb{Q}$, мы будем обозначать соответствующее подмножество через M_α (чтобы избежать формально правильных, но шокирующих записей наподобие $1 \in \sqrt{2}$). Таким образом, α и M_α — это два обозначения для одного и того же математического объекта. Наконец, $\mathbb{R}$ — это не просто множество; действительные числа можно сравнивать друг с другом, складывать, умножать, и т. д.; все эти вещи нужно также определить, чем мы сейчас и займемся.

Проще всего определить неравенства между действительными числами.

Определение 3.5. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что α не превосходит β (обозначение: $\alpha \leqslant \beta$), если $M_\alpha \subset M_\beta$.

Предложение 3.6. *Для любых действительных чисел α и β выполнено либо неравенство $\alpha \leqslant \beta$, либо неравенство $\beta \leqslant \alpha$.*

Доказательство. Пусть неравенство $\alpha \leqslant \beta$ не выполнено. Тогда существует рациональное число r, принадлежащее M_α, но не M_β. Покажем, что в этом случае $M_\beta \subset M_\alpha$. В самом деле, для всякого $p \in M_\beta$ имеем $p < r$ (в противном случае $p \geqslant r$ и в силу условия (2) в определении сечения имеем $p \in M_\beta$), откуда по тому же условию (2) имеем $p \in M_\alpha$. Итак, $M_\beta \subset M_\alpha$, то есть $\beta \leqslant \alpha$. $\square$

Определение 3.7. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\alpha < \beta$, если $\alpha \leqslant \beta$ и $\alpha \neq \beta$; что $\alpha \geqslant \beta$, если $\beta \leqslant \alpha$; что $\alpha > \beta$, если $\alpha \geqslant \beta$ и $\alpha \neq \beta$.

Заметим, что для рациональных чисел у нас теперь есть два разных определения неравенств: одно известное со школы, и другое — определение 3.5, примененное к рациональным числам как элементам $\mathbb{R}$ (то есть сечениям). Проверьте самостоятельно, что эти определения согласованы: это легко. Еще проще проверить, что для действительных чисел выполнены все те из перечисленных в школьных учебниках свойств неравенств, в формулировке которых не участвуют арифметические действия.

Теперь определим сложение действительных чисел. Чтобы дать это определение, надо предварительно кое-что доказать:

Предложение 3.8. *Пусть M_1 и M_2 — сечения. Тогда подмножество $M \subset \mathbb{Q}$, состоящее из всевозможных сумм p_1+p_2, где $p_1 \in M_1$, $p_2 \in M_2$, является сечением.*

Доказательство. Проверим последовательно условия (1), (2) и (3) из определения сечения.

Условие (1): поскольку M_1 и M_2 — сечения, существуют такие рациональные числа A и B, что всякий элемент из M_1 меньше A, а всякий элемент из M_2 меньше B (в противном случае, ввиду условия (2), оказалось бы, что M_1 или M_2 совпадает со всем $\mathbb{Q}$). Тогда всякий элемент M меньше $A+B$, и $A+B \notin M$.

Условие (2): пусть $p \in M$ и $q < p$. По определению M имеем $p = p_1 + p_2$, где $p_1 \in M_1$ и $p_2 \in M_2$. Поскольку $q < p$, найдутся такие рациональные числа q_1 и q_2, что $q = q_1 + q_2$, и при этом $q_1 < p_1$ и $q_2 < p_2$. Так как M_1 и M_2 — сечения, условие (2) показывает, что $q_1 \in M_1$, $q_2 \in M_2$, откуда $q \in M$.

Условие (3): пусть $p = p_1 + p_2 \in M$ ($p_i \in M_i$). Так как M_i — сечения, найдутся такие числа $p_i' \in M_i$, что $p_i' > p_i$. Тогда число $p' = p_1' + p_2' \in M$ и $p' > p$. Значит, множество M не имеет наибольшего элемента. $\square$

Вооружившись доказанным предложением, дадим

Определение 3.9. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — действительные числа. Их *суммой* называется сечение, состоящее из всевозможных сумм вида $p + q$, где $p \in M_\alpha$, $q \in M_\beta$.

Корректность этого определения обеспечивается предложением 3.8.

Впрочем, одной корректности мало: складывать рациональные числа мы и раньше умели, так что теперь надо проверить, что сложение рациональных чисел как действительных (в соответствии с определением 3.9) даст тот же результат, что сложение «по старинке». Иными словами, надо проверить следующее утверждение: если $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, то сечение $M_{r_1+r_2}$ (см. пример 3.2) совпадает с множеством всевозможных сумм вида $p+q$, где $p \in M_{r_1}$ и $q \in M_{r_2}$. Это действительно так (а если бы оказалось, что нет, то наше определение сложения действительных чисел пришлось бы переделывать!); доказательство можно спокойно предоставить читателю.

Тривиально проверяется, что сложение действительных чисел ассоциативно и коммутативно (говоря по-школьному, выполнены сочетательный и переместительный законы).

Разобравшись со сложением, определим вычитание. Поскольку $a - b = a + (-b)$, достаточно для каждого числа определить противоположное. Начнем с утверждения, которое нам пригодится и в дальнейшем:

Лемма 3.10. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha < \beta$. Тогда существует такое рациональное число r, что $\alpha < r < \beta$.*

Доказательство. Согласно условию, существует число $r \in M_\beta \setminus M_\alpha$. Поскольку, ввиду условия (2) в определении сечения, $M_\alpha \subset M_r \subset M_\beta$, причем оба включения — строгие, число r является искомым. $\square$

Теперь противоположное число определяется так:

Предложение-определение 3.11. Пусть α — действительное число. Тогда множество M, состоящее из всех чисел вида $-r$, где $r \in \mathbb{Q}$ и $r > \alpha$, является сечением; действительное число, соответствующее этому сечению, обозначается $-\alpha$; для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Доказательство предоставляется читателю (при проверке условия (3) в определении сечения можно воспользоваться леммой 3.10).

Теперь читатель может самостоятельно проверить, что для действительных чисел выполнены все известные из школы свойства наподобие $a - (b - c) = a - b + c$ или $(a < b) \Leftrightarrow (-b < -a)$. Определением действительных чисел придется воспользоваться только при проверке соотношений $a + 0 = 0$ и $(a > 0) \Leftrightarrow (-a < 0)$, остальное получается чисто формальными манипуляциями.

Далее, можно определить абсолютную величину действительного числа (по формуле $|a| = \max(a, -a)$) и проверить все обычные неравенства с модулями. Эта чисто формальная деятельность также предоставляется читателю.

Наконец, отметим, что, коль скоро мы строго определили сложение и неравенства между действительными числами, стало законным и определение метрического пространства.

Остается определить умножение и деление. Сделаем мы это не сразу, а после некоторой подготовки. Понятия и результаты, с которыми мы познакомимся по ходу дела, весьма важны сами по себе.

Начнем с того, что докажем, что всякое действительное число является пределом последовательности рациональных чисел.

Предложение 3.12. *Для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует такая последовательность $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ рациональных чисел, что $\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha$.*

Доказательство. Фактически мы построим (не называя вещей своими именами) разложение α в бесконечную десятичную дробь.

Для начала заметим, что, поскольку найдется целое число $n \notin M_\alpha$, множество целых чисел, не превосходящих α, ограниченно сверху и тем самым имеет наибольший элемент. Обозначим его r_1. Итак, $r_1 \leqslant \alpha$, $r_1+1 > \alpha$. Теперь рассмотрим числа $r_1, r_1+1/10, r_1+2/10, \dots, r_1+10/10$. Первое из них не превосходит α, последнее из них больше α; стало быть, найдется такое целое число $i \in [0; 9]$, что $r_1+i/10 \leqslant \alpha$ и $r_1+(i+1)/10 > \alpha$. Обозначим $r_1 + i/10 = r_2$. Теперь найдем такое целое $j \in [0; 9]$, что $r_2 + j/10^2 \leqslant \alpha$ и $r_2 + (j + 1)/10^2 > \alpha$, обозначим $r_2 + j/10^2 = r_3$, и т. п. В результате мы построим последовательность рациональных чисел r_n, обладающую тем свойством, что $r_n \leqslant \alpha < r_n + 1/10^{n-1}$. Стало быть, $|r_n - \alpha| < 10^{n-1}$, откуда $\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha$. □

Теперь — важное определение.

Определение 3.13. *Точной верхней гранью* подмножества $X \subset \mathbb{R}$ называется наименьшее из чисел $c \in R$, обладающих следующим свойством: $x \leqslant c$ при всех $x \in X$. Точная верхняя грань множества X обозначается $\sup X$.

Очевидно, что точная верхняя грань (иногда мы будем для краткости говорить просто «верхняя грань») единственна, если она существует. Ясно, что она не существует, если множество M не является «ограниченным сверху» (то есть содержит сколь угодно большие числа). Во всех остальных случаях, однако, точная верхняя грань имеется:

Теорема 3.14 (о верхней грани). *Всякое ограниченное сверху подмножество $X \in \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство. Пусть $M \subset \mathbb{Q}$ — объединение сечений $M_\alpha \subset \mathbb{Q}$ для всех $\alpha \in X$. Покажем, что M — сечение и что действительное число, соответствующее этому сечению, является верхней гранью X.

Так как X ограниченно сверху, то существует такое $c \in R$, что $\alpha \leqslant c$ при всех $\alpha \in X$. Тогда, по определению неравенств между действительными числами, $M_\alpha \subset M_c$ для всех $\alpha \in X$, отсюда $M \subset M_c$, и любое рациональное число, не лежащее в M_c, не лежит и в M, так что условие (1) в определении сечения выполнено. Если $p \in M_\alpha \subset M$ и $q < p$, то $q \in M_\alpha \subset M$, так что условие (2) тоже выполнено. Наконец, выполнено и условие (3): если $p \in M_\alpha \subset M$ — наибольший элемент в M, то p и подавно будет наибольшим в M_α, что невозможно.

Итак, M — действительно сечение. Тот факт, что действительное число, соответствующее M, — точная верхняя грань множества X, теперь очевиден из определения 3.5: будучи объединением всех M_α, множество M, с одной стороны, всех их содержит, а с другой стороны, содержится в вообще любом множестве (не обязательно сечении), содержащем все M_α. $\square$

Доказательство теоремы о верхней грани — последнее место в нашем курсе, где мы напрямую использовали определение действительных чисел через сечения. Далее мы будем пользоваться более удобными средствами (только что доказанная теорема — первое из них).

Для начала заметим, что у определения 3.13 и теоремы 3.14 есть полезные аналоги, получаемые обращением знаков неравенств.

Именно, *точной нижней гранью,* или просто нижней гранью подмножества $X \subset \mathbb{R}$ называется наибольшее из таких чисел c, что $c \leqslant x$ при всех $x \in X$. Всякое ограниченное снизу множество имеет (единственную) точную нижнюю грань. Это легко выводится из теоремы 3.14 (рассмотрите множество, состоящее из чисел, противоположных элементам множества X). Точная нижняя грань множества X обозначается $\inf X$.

Теперь — первое следствие из теоремы о верхней (и нижней) грани.

Предложение 3.15. *Пусть X — подмножество $\mathbb{R}$. Тогда $\sup X$ и $\inf X$ лежат в замыкании множества X (если, конечно, они существуют).*

Доказательство. Пусть, например, $a = \sup X$. Тогда, по определению точной верхней грани, для любого $\varepsilon > 0$ число $a-\varepsilon$ не является «верхней границей» множества X: найдется такое $x \in X$, что $a - \varepsilon < x$; с другой стороны, также по определению, $x \leqslant a$. Значит, $x \in B_\varepsilon(a)$. Ввиду произвольности выбора ε, предложение 2.4 показывает, что $a \in \bar{X}$. $\square$

Следующее предложение — первый из доказанных нами результатов, в которых утверждается, при более или менее общих условиях, существование предела. Несколько упрощая дело, можно сказать, что формальная теория действительных чисел нужна именно ради того, чтобы можно было доказывать существование предела, не вычисляя его заранее.

Предложение 3.16. *Всякая монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность действительных чисел имеет предел.*

Напомним, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется монотонно возрастающей, если выполнены неравенства $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$. (В другой терминологии такие последовательности называются монотонно неубывающими, а монотонно возрастающими называются последовательности, для которых в этом соотношении все неравенства строгие.)

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — наша последовательность, и пусть множество X состоит из всех чисел x_n. По теореме 3.14 у этого множества есть верхняя грань a; покажем, что $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

В самом деле, коль скоро $a \in \bar{X}$ по предложению 3.15, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $a - \varepsilon < x_n \leqslant a$. Поскольку последовательность монотонно возрастает и все ее члены не превосходят a, это же неравенство будет выполняться и для всех $m \geqslant n$, так что для всех $m \geqslant n$ имеем $|x_m - a| < \varepsilon$, что и требовалось. □

Точно так же можно доказать, что всякая монотонно убывающая и ограниченная снизу последовательность имеет предел; на этот факт мы также будем ссылаться как на теорему 3.16.

Прежде, чем двигаться дальше, полезно ввести следующие соглашения и обозначения. Рассмотрим множество $\bar{R} = R \cup \{\pm\infty\}$, состоящее из действительных чисел, к которым формально добавлены два символа: ∞ (она же $+\infty$) и $-\infty$. Никаких арифметических действий с этими «бесконечностями» производить нельзя, можно их только сравнивать друг с дружкой и с числами: именно, мы считаем, что $-\infty < x < \infty$ для всех $x \in \mathbb{R}$. В этих обозначениях теорему 3.14 можно переформулировать так: всякое подмножество $X \subset \bar{\mathbb{R}}$ имеет точную верхнюю и нижнюю грань (например, если X состоит только из чисел и ограниченно сверху как подмножество $\mathbb{R}$, то его точная верхняя грань совпадает с обычной $\sup X \in \mathbb{R}$, а если X не ограниченно сверху, то его точная верхняя грань в $\bar{\mathbb{R}}$ равна $+\infty$; остальные случаи разберите самостоятельно).

Имея в виду эти обозначения, введем следующее

Определение 3.17. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность действительных чисел. Ее *верхним пределом* называется число (или символ) $\overline{\lim}\, x_n = \inf\limits_n \sup\limits_{m\geqslant n} x_m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Другое обозначение для верхнего предела: $\limsup x_n$. Далее, *нижним пределом* последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется $\underline{\lim}\, x_n = \sup\limits_{n} \inf\limits_{m\geqslant n} x_m \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Другое обозначение для нижнего предела: $\liminf x_n$.

Чтобы освоиться с этими понятиями, давайте докажем лемму.

Лемма 3.18. *Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность действительных чисел. Для всякого $n\in\mathbb{N}$ положим $U_n = \sup\limits_{m\geqslant n} x_m$ и $L_n = \inf\limits_{m\geqslant n} x_m$. Тогда $L_p \leqslant U_q$ для любых $p,q\in\mathbb{N}$.*

Доказательство. Из определения верхней и нижней граней очевидно, что последовательность $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно убывает, а последовательность $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно возрастает. Кроме того, из тех же определений очевидно, что $L_n \leqslant U_n$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Из сопоставления этих утверждений лемма вытекает немедленно. □

Следствие 3.19. *Для любой последовательности действительных чисел $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеем $\underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n$.*

Теперь мы можем сформулировать первый (пока еще не очень удобный) критерий существования предела у произвольной последовательности действительных чисел. Следующую теорему можно рассматривать как обобщение предложения 3.16.

Теорема 3.20. *Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ действительных чисел имеет предел (в $\mathbb{R}$) тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний пределы совпадают и конечны (то есть лежат в $\mathbb{R}$). В этом случае предел последовательности совпадает с ее верхним и нижним пределами.*

Доказательство. Мы докажем часть «тогда» (именно она будет использоваться в дальнейшем), предоставив читателю доказательство обратного утверждения. Итак, пусть число $a\in\mathbb{R}$ является одновременно и верхним, и нижним пределами нашей последовательности; покажем, что $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Будем пользоваться обозначениями леммы 3.18. Из этой леммы и предложения 3.16 (точнее говоря, из доказательства этого последнего) вытекает, что $\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} U_n = a$. Стало быть, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n\in\mathbb{N}$, что

$$a-\varepsilon < L_n \leqslant a \leqslant U_n < a+\varepsilon.$$

□

Из определения чисел L_n и U_n вытекает, что, при всех $m\geqslant n$, имеем $L_n \leqslant x_m \leqslant U_n$. Стало быть, при всех $m\geqslant n$ выполнено неравенство $a-\varepsilon < x_m < a+\varepsilon$. Это и означает, что число a является пределом последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Основываясь на доказанной теореме, можно получить более совершенный критерий сходимости последовательности действительных чисел. Начнем с определения, которое удобно дать сразу для общего случая.

Определение 3.21. Пусть X — метрическое пространство. Последовательность его точек $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *фундаментальной* (синоним: последовательность Коши), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $m, n > N$ выполнено неравенство $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Предложение 3.22. *Если последовательность имеет предел, то она фундаментальна.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда для всякого рационального $r > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $\rho(x_n, a) < r/2$ как только $n > N$. Если теперь $m, n > N$, то $\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, a) + \rho(x_n, a) < r/2 + r/2 = r$. Теперь для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем, по лемме 3.10, такое рациональное $r > 0$, что $r < \varepsilon$, а затем число $N \in \mathbb{N}$, как описано выше. Если $m, n > N$, то $\rho(x_m, x_n) < r < \varepsilon$, что и требовалось. □

Замечание 3.23. Хитрости с заменой ε на r в этом доказательстве связаны с тем, что мы не имеем права написать $\varepsilon/2$, так как еще не определили деление действительных чисел.

Итак, всякая имеющая предел (еще говорят: сходящаяся) последовательность фундаментальна. Следующее определение выделяет важный класс метрических пространств, для которых верно обратное.

Определение 3.24. Метрическое пространство называется *полным,* если в нем всякая фундаментальная последовательность имеет предел.

Вообще говоря, метрическое пространство быть полным вовсе не обязано. Например, интервал $(0; 1)$ (с метрикой, индуцированной с $\mathbb{R}$) неполон: последовательность $x_n = 1/n$ фундаментальна (так как она сходится в $\mathbb{R} \supset (0; 1)$), но предела в $(0; 1)$ не имеет. Следующая теорема утверждает, что $\mathbb{R}$, тем не менее, полно.

Теорема 3.25 (критерий Коши). *Последовательность действительных чисел сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. То, что сходящаяся последовательность фундаментальна, вытекает из предложения 3.22. Обратно, пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность действительных чисел; докажем, что она сходится. Для начала

Лемма 3.26. *Фундаментальная последовательность действительных чисел ограничена (и сверху, и снизу).*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна; взяв в определении $\varepsilon = 1$, получим, что найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что при всех $m \geqslant n$ имеем $|x_m - x_n| < 1$. Следовательно, $|x_m| \leqslant |x_n| + 1$ при всех $m \geqslant n$; полагая $C = \max\{|x_1|, \dots, |x_{n-1}|, |x_n| + 1\}$, получаем, что $|x_k| \leqslant C$ при всех $k \in \mathbb{N}$, что и требовалось. □

Продолжим доказательство критерия Коши. В силу леммы последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так что $\alpha = \underline{\lim}\, x_n$ и $\beta = \overline{\lim}\, x_n$ конечны; рассуждая от противного, предположим, что предела у последовательности нет, тогда в силу критерия 3.20 имеем $\alpha < \beta$. Покажем, что в этом случае последовательность $\{x_n\}$ не может быть фундаментальной. В самом деле, пусть ε — положительное число, меньшее $\beta - \alpha$ (такое существует по лемме 3.10). Для всякого $N \in \mathbb{N}$ имеем, пользуясь обозначениями из доказательства леммы 3.18, $U_N \geqslant \beta$ и $L_N \leqslant \alpha$. Согласно определению чисел U_N и L_N, найдутся такие номера $m, n \geqslant N$, что $\beta \leqslant x_m \leqslant U_N$ и $L_N \leqslant x_n \leqslant \alpha$. Стало быть, $x_m - x_n \geqslant \beta - \alpha > \varepsilon$. Ввиду произвольности выбора N, это противоречит определению фундаментальной последовательности, что и завершает доказательство. □

Теперь мы готовы к тому, чтобы дать определение умножения действительных чисел.

Определение 3.27. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — действительные числа. Их *произведением* называется число $\lim_{n\to\infty} p_n q_n$, где $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — какая-то последовательность рациональных чисел, сходящаяся к α и $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — какая-то последовательность рациональных чисел, сходящаяся к β.

Чтобы иметь право давать такое определение, надо убедиться, что оно «корректно»; конкретно, надо сделать следующие проверки:

1) Надо убедиться, что всегда найдутся последовательности рациональных чисел $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$, сходящиеся к α и β.

2) Надо убедиться, что при любом выборе последовательностей $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ последовательность $\{p_n q_n\}$ будет иметь предел.

3) Надо убедиться, что этот предел не зависит от выбора $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$.

4) Наконец, надо убедиться, что для рациональных α и β наше новое определение произведение согласуется со старым.

Приступим к проверкам. Условие (1) выполняется ввиду леммы 3.10. Как только мы проверим (3), условие (4) также станет очевидно: для вычисления произведения рациональных чисел p и q можно рассмотреть последовательности, все члены которых совпадают с p (соотв. q).

Проверка условия (2). Ввиду только что доказанного критерия Коши достаточно показать, что последовательность $\{p_n q_n\}$ фундаментальна. В самом деле, последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$, будучи сходящимися, фундаментальны (предложение 3.22), а будучи фундаментальными, ограничены (лемма 3.26). Значит, существует такое целое число $M > 0$, что $|p_n| < M$ и $|q_n| < M$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Для доказательства фундаментальности оценим разность $p_m q_m - p_n q_n$:

$$\begin{aligned} |p_m q_m - p_n q_n| = |p_m(q_m - q_n) + q_n(p_m - p_n)| \leqslant \\ \leqslant |p_m| \cdot |q_m - q_n| + |q_n| \cdot |p_m - p_n| \leqslant \\ \leqslant M(|q_m - q_n| + |p_m - p_n|). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Теперь фундаментальность последовательности-произведения проверяется так: для $\varepsilon > 0$ найдем положительное рациональное $r < \varepsilon$, а по нему, ввиду фундаментальности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$, найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что $|p_m - p_n| < r/2M$ и $|q_m - q_n| < r/2M$ при $m, n > N$. Тогда при тех же m и n имеем, ввиду неравенства (3.1), $|p_m q_m - p_n q_n| \leqslant M(r/2M + r/2M) = r < \varepsilon$, что и требовалось. (Опять нам пришлось идти на хитрость, чтобы не писать выражение $\varepsilon/2M$ в отсутствие определения деления.) □

Проверка условия (3). Достаточно проверить следующее: если $\lim p_n = \lim p'n$, то $\lim p_n q_n = \lim p' n q_n$ (излишне объяснять, что мы предполагаем, что последовательности $\{p_n\}$, $\{p'_n\}$ и $\{q_n\}$ фундаментальны). Из равенства $\lim p_n = \lim p'n$ стандартным образом выводится, что $\lim(p_n - p'_n) = 0$ (для $\varepsilon > 0$ найдем такое рациональное $r > 0$, что $2r < \varepsilon$; если $|p_n| < r$ и $|p'_n < r|$, то $|p_n - p'_n| < \varepsilon$). Поскольку последовательность $\{q_n\}$, будучи фундаментальной, ограничена, отсюда вытекает, что $\lim(p_n - p'_n)q_n = 0$ (если $|q_m| < M \in \mathbb{N}$ для всех m, то для $\varepsilon > 0$ найдем такое рациональное $r > 0$, что $rM < \varepsilon$; тогда из $|p_n - p'_n| < r$ вытекает, что $|(p_n - p'_n)q_n| < \varepsilon$). Отсюда, наконец, вытекает, что

$$\lim p_n q_n = \lim((p_n - p'_n)q_n + p'_n q_n) = \lim(p_n - p'_n)q_n + \lim p'_n q_n = \lim p'_n q_n.$$

□

Итак, корректность определения умножения действительных чисел проверена. При определении деления возникает небольшая проблема: в предположениях определения 3.27 нельзя просто сказать, что $\alpha/\beta = \lim p_n/q_n$, поскольку какие-то из q_n могут равняться нулю. Эта техническая трудность обходится так:

Лемма 3.28. *а) Пусть $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность действительных (соотв. рациональных) чисел, сходящаяся к ненулевому пределу.*

Тогда существует последовательность $\{q'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, состоящая из ненулевых действительных (соотв. рациональных) чисел, сходящаяся к тому же пределу.

б) Пусть $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность ненулевых действительных (соотв. рациональных) чисел, сходящаяся к ненулевому пределу. Тогда последовательность $\{1/q_n\}$ ограничена.

Доказательство. Пусть $\lim q_n = a$, и пусть r — рациональное число, заключенное между нулем и a. Тогда существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n| > |r|$ при всех $n \geqslant N$. Заменяя значения $q_1, \ldots, q_{N-1}$ на единицу, получаем последовательность q'_n, имеющую тот же предел и состоящую из ненулевых чисел. Если же все q_n были изначально отличны от нуля, то заметим, что $|q_n| \leqslant 1/|r|$ при всех $n \geqslant N$; полагая $M = \max\{1/|q_1|, \ldots, 1/|q_{N-1}|, 1/|r|\}$, получаем, что $|q_m| \leqslant M$ для всех m. $\square$

Теперь определение деления дается так:

Определение 3.29. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — действительные числа, причем $\beta \neq 0$. Их *частным* называется число $\lim_{n\to\infty} p_n/q_n$, где $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — какая-то последовательность рациональных чисел, сходящаяся к α и $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — какая-то последовательность отличных от нуля рациональных чисел, сходящаяся к β.

Проверка корректности этого определения проводится аналогично такой проверке для умножения с использованием леммы 3.28. Не будем лишать читателя удовольствия проделать эту проверку самостоятельно. Предоставляем также читателю проверить выполнение стандартных свойств действительных чисел (аксиомы поля, связь умножения и деления с неравенствами, и т. п.); никаких принципиальных трудностей при этом не встретится.