Лекция 5. Связность; пополнение

Эта лекция посвящена двум слабо связанным между собой темам из «абстрактной топологии» (по возможности, с конкретными приложениями).

Предложение-определение 5.1. Топологическое пространство X называется *несвязным,* если выполнено одно из трех эквивалентных условий:

1) X представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых подмножеств.

2) X представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых подмножеств.

3) Существует непустое и отличное от всего X подмножество $M \subset X$, являющееся одновременно открытым и замкнутым.

Топологическое пространство называется *связным,* если оно не является несвязным.

Подмножество Y в топологическом пространстве X называется *связным,* если оно связно относительно индуцированной топологии.

Эквивалентность четырех условий проверяется тривиально.

Приведем сначала примеры несвязных пространств.

Пример 5.2. Пусть $M \subset \mathbb{R}$ — связное подмножество. Тогда оно обязано быть «выпуклым»: если $a, b \in M$ и $a < b$, то $[a;b] \subset M$.

В самом деле, если $a < z < b$ и $z \notin M$, то имеем

$$M = (M \cap (-\infty; z)) \cup (M \cap (z; \infty)),$$

что и дает разбиение M на два непересекающихся непустых открытых подмножества.

Привести нетривиальный пример связного пространства немногим труднее:

Предложение 5.3. *Всякий отрезок $[a;b] \subset \mathbb{R}$ связен.*

Доказательство. Предположим противное; тогда существует отличное от $[a;b]$ непустое открыто-замкнутое (то есть одновременно открытое и замкнутое) подмножество $M \subset [a;b]$; не ограничивая общности, можно считать, что $M \ni a$ (в противном случае заменим M на его дополнение). Покажем, что $M = [a;b]$ — это и даст желаемое противоречие.

В самом деле, положим $X = \{\, x \in (a;b] \mid [a;x] \subset M \,\}$. Поскольку множество M открыто и содержит a, оно содержит также интервал вида $[a; a+\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, так что $X \neq \varnothing$. Пусть $\xi = \sup X$; покажем, что $\xi \in X$. В самом деле, ясно, что (независимо от специфики множества X) существует

возрастающая последовательность чисел $x_n \in X$ такая, что $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$. Поскольку $[a;x_n] \subset M$ для всех n, имеем $[a;\xi) \subset \bigcup_n [a;x_n] \subset M$. Кроме того, $x \in M$, так как M замкнуто, а x является пределом последовательности элементов множества M. Стало быть, $[a;\xi] \subset M$ и $\xi \in X$. Покажем теперь, что $\xi = b$. В самом деле, если $\xi < b$, то, ввиду открытости множества M, существует такое $\varepsilon > 0$, что $[\xi-\varepsilon;\xi+\varepsilon] \subset M$. Следовательно, $[a;\xi+\varepsilon] = [a;\xi] \cup [\xi-\varepsilon;\xi+\varepsilon] \subset M$ и $\xi+\varepsilon \in X$, в противоречие с тем, что $\xi = \sup X$. Значит, $\xi = b$ и $M = [a;b]$ — противоречие. □

Докажем теперь несколько простых, но важных общих свойств связных пространств.

Предложение 5.4. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, причем X связно. Тогда $f(X) \subset Y$ также связно.*

Доказательство. Пусть, напротив, $f(X)$ несвязно. Тогда существуют такие открытые подмножества $U_1, U_2 \subset X$, что $X \subset U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 \cap X = \varnothing$, и оба пересечения $X \cap U_1$ и $X \cap U_2$ непусты. Отсюда вытекает, что X является объединением непустых непересекающихся подмножеств $f^{-1}(U_1)$ и $f^{-1}(U_2)$ и тем самым несвязно — противоречие. □

Предложение 5.5. *Пусть топологическое пространство X обладает таким свойством: для любых двух точек $x, y \in X$ существует связное подмножество $I \subset X$, содержащее x и y. Тогда X связно.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $X = U_1 \cup U_2$, где открытые множества U_1 и U_2 непусты и не пересекаются. Выберем точки $x \in U_1$ и $y \in U_2$, и пусть $I \subset X$ — связное подмножество, существование которого утверждается в условии предложения. Тогда $I = (I \cap U_1) \cup (I \cap U_2)$, причем оба этих множества открыты в I в индуцированной топологии и непусты (одно содержит x, другое содержит y). Значит, I несвязно — противоречие. □

Сопоставляя предложения 5.4 и 5.5, получаем, что любой интервал в $\mathbb{R}$ (такой, как $(a;b]$, $(-\infty;a)$, и т. д., в том числе само пространство $\mathbb{R}$) является связным.

Обобщая предыдущее замечание, приходим к такому определению:

Определение 5.6. Топологическое пространство X называется *линейно связным,* если для всяких двух точек $x, y \in X$ существуют такие отрезок $[a;b] \subset \mathbb{R}$ и непрерывное отображение $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$, что $f(a) = x$ и $f(b) = y$.

Предложения 5.4 и 5.5 показывают, что всякое линейно связное пространство является связным. В частности, связны пространство $\mathbb{R}^n$, любой параллелотоп в $\mathbb{R}^n$, и вообще любое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Существуют примеры связных пространств, не являющихся линейно связными; нам эти примеры, видимо, не понадобятся, но следует помнить, что в природе они существуют. Встречаются на свете и пространства, которые не только сами не

связны, но и не представляются в виде конечного или счетного объединения связных подмножеств (яркий пример: $\mathbb{Z}_p$ или $\mathbb{Q}_p$).

Связные подмножества $\mathbb{R}$ можно полностью описать:

Предложение 5.7. *Подмножество $M \subset \mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда оно является отрезком $[a;b]$, полуоткрытым интервалом $(a;b]$ или $[a;b)$ или открытым интервалом $(a;b)$, где $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. (При символах ∞ и $-\infty$ квадратные скобки не ставятся; случай $a = b$ не исключен.)*

Доказательство. Мы уже отмечали, что всякое множество указанного вида является связным; покажем, что никаких других связных подмножеств у $\mathbb{R}$ нет.

Разберем сначала случай, когда M ограничено. Положим $a = \inf M$, $b = \sup M$ (это настоящие числа). Заметим, что $(a;b) \subset M$. В самом деле, если $a < c < b$, то (по определению верхней и нижней граней) существуют такие числа u и v, что $a < u < c < v < b$ и при этом $u, v \in M$; пример 5.2 показывает, что $[u;v] \subset M$ и, в частности, $c \in M$.

Итак, $(a;b) \subset M$, никакие числа, меньшие a или большие$'b$, во множество M не входят, и остается разобрать четыре возможных случая в зависимости от того, входят ли в M сами числа a и b — при этом получаем варианты $(a;b)$, $[a;b)$, $(a;b]$ и $[a;b]$.

Случай, когда M не ограниченно сверху и/или снизу, разберите самостоятельно. □

Нелишне заметить, что ни о какой классификации связных подмножеств в $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$ и речи быть не может.

Теперь приведем приложение доказанных общих фактов к конкретному анализу.

Предложение 5.8. *Пусть f — непрерывная функция на отрезке $[a;b]$ с действительными значениями. Тогда множество ее значений $f([a;b]) \subset \mathbb{R}$ также является отрезком. В частности, f принимает все значения, промежуточные между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство. Предложения 4.8 и 4.7 показывают, что множество $f([a;b])$ замкнуто и ограничено, а предложение 5.4 показывает, что это множество является интервалом; однако всякий замкнутый в $\mathbb{R}$ и ограниченный интервал является отрезком. □

Перейдем ко второй теме.

Определение 5.9. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Его *пополнением* называется пара $(\bar{X}, i)$, в которой $\bar{X}$ — полное метрическое пространство, $i\colon X \to \bar{X}$ — вложение, сохраняющее расстояния, и замыкание подмножества $i(X) \subset \bar{X}$ совпадает со всем $\bar{X}$.

Часто пополнением называют не пару $(\bar{X}, i)$, а пространство $barX$, поскольку отображение i обычно ясно из контекста.

Основное свойство пополнений состоит в том, что пополнение всегда существует и единственно. Точнее говоря:

Теорема 5.10. *У всякого метрического пространства (X, ρ) существует пополнение; если $(\bar{X}_1, i_1)$ и $(\bar{X}_2, i_2)$ — два пополнения пространства (X, ρ), то существует и единственно такое взаимно-однозначное сохраняющее расстояния отображение $\varphi\colon \bar{X}_1 \to \bar{X}_2$, что $\varphi \circ i_1 = i_2$.*

Примером пополнения может послужить любая пара, состоящая из полного метрического пространства $\bar{X}$ и вложения в него его «плотного» подмножества X (подмножество в топологическом пространстве называется плотным, если его замыкание совпадает со всем пространством). Например, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$ являются пополнениями $\mathbb{Q}$ (относительно разных метрик!). Смысл теоремы 5.10 в том, что всегда можно сконструировать полное пространство из неполного.

Весь дальнейший текст лекции посвящен доказательству этой теоремы. Зафиксируем метрическое пространство (X, ρ). Начнем с лемм.

Лемма 5.11. *Если a, b, c и d — точки метрического пространства, то $|\rho(a,d) - \rho(b,c)| \leqslant \rho(a,b) + \rho(c,d)$.*

Доказательство. Если, например, $\rho(a,d) \geqslant \rho(b,c)$, то, дважды применяя неравенство треугольника, запишем

$$\rho(a,d) \leqslant \rho(a,b) + \rho(b,c) + \rho(c,d),$$

после чего перенесем $\rho(b,c)$ в левую часть.

В противном случае начнем с неравенства с $\rho(b,c)$ в левой части. □

Лемма 5.12. *Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две фундаментальные последовательности в метрическом пространстве, то существует предел $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$.*

Доказательство. Ввиду критерия Коши достаточно показать, что последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна. Зададимся числом $\varepsilon > 0$. Ввиду фундаментальности последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что при $m, n > N$ имеем $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon/2$ и $\rho(y_m, y_n) < \varepsilon/2$. По лемме 5.11 имеем теперь

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

что и доказывает фундаментальность. □

Лемма 5.13. *Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две сходящиеся последовательности действительных чисел, причем $a_n \leqslant b_n$ при всех n. Тогда $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$.*

Доказательство. Если, напротив, $a = \lim a_n > limb_n = b$ и $\varepsilon = (a-b)/2$, то существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < \varepsilon$ и $|b_n - b| < \varepsilon$. Тогда $a_n > b_n$ в противоречие с условием. □

Назовем теперь фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалентными, если $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$.

Лемма 5.14. *Если фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ эквивалентна фундаментальной последовательности $\{y_n\}$, а эта последняя, в свою очередь, — фундаментальной последовательности $\{z_n\}$, то последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ эквивалентны.*

Доказательство. По неравенству треугольника имеем $\rho(x_n, z_n) \leqslant \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n)$. Переходя к пределу и пользуясь леммой 5.13, получаем, что $\lim \rho(x_n, z_n) = 0$. □

Лемма 5.15. *Пусть $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ и $\{y_n\}$ — фундаментальные последовательности, причем последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ эквивалентны. Тогда* $\lim \rho(x_n, y_n) = \lim \rho(x'_n, y_n)$.

Доказательство. Переходя к пределу в неравенств $\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(x'_n, y_n)$, получаем, что $\lim \rho(x_n, y_n) \leqslant \lim \rho(x'_n, y_n)$; начиная с x'_n вместо x_n, получаем обратное неравенство. □

Лемма 5.14 показывает, что все множество фундаментальных последовательностей в X разбивается на попарно непересекающиеся «классы эквивалентности» — множества эквивалентных друг другу фундаментальных последовательностей. Определим теперь $\bar{X}$ как множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей. Расстояние между двумя элементами $\alpha, \beta \in \bar{X}$ определим так: если $\{x_n\}$ — последовательность, входящая в класс α, а $\{y_n\}$ — последовательность, входящая в класс β, то $\rho(\alpha, \beta) = \lim \rho(\alpha_n, \beta_n)$. Леммы 5.12 и 5.15 показывают, что этот предел всегда существует и не зависит от выбора представителей в классах α и β. Тем самым $\bar{X}$ становится метрическим пространством: условие (1) следует из определения эквивалентности последовательностей, условие (2) очевидно, условие (3) получается, если перейти к пределу в неравенстве треугольника.

Вложение $i\colon X \to \bar{X}$ определим так: если $x \in X$, то $i(x)$ — класс эквивалентности последовательности $\{x_n\}$, для которой $x_n = x$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Стало быть, у нас есть метрическое пространство $\bar{X}$ и сохраняющее расстояния вложение $i\colon X \to \bar{X}$; покажем, что $\bar{X}$ — пополнение пространства X. Для этого нужно проверить две вещи: что $i(X)$ плотно в $\bar{X}$ (то есть замыкание $i(X)$ совпадает с $\bar{X}$) и что $\bar{X}$ полно.

Плотность $i(X)$ в $\bar{X}$. Пусть $\alpha \in \bar{X}$ — класс фундаментальных последовательностей и $\{x_n\}$ — какой-то его представитель. Пусть $\alpha_n = i(x_n) \in \bar{X}$ —

класс, содержащий последовательность, все члены которой равны x_n. Покажем, что $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ — так как замыкание множества в метрическом пространстве есть множество пределов всех сходящихся последовательностей, члены которых лежат в этом множестве, из этого будет все следовать.

В самом дел, по определению расстояния в $\bar{X}$ имеем $\rho(\alpha_n, \alpha) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m)$. Зададимся положительным$\varepsilon > 0$. Так как последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, существует такое N, что при всех $m, n > N$ имеем $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем, что, при $n > N$, $\rho(\alpha_n, \alpha) \leqslant \varepsilon$, что и требовалось. □

Полнота пространства $\bar{X}$. Пусть $\{\alpha_n\}$ — фундаментальная последовательность элементов $\bar{X}$. Поскольку, как мы только что доказали, $i(X)$ плотно в X, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $x_n \in X$, что $\rho(i(x_n), \alpha_n) < 1/n$. Мы покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и что представляемый ею класс $\alpha \in \bar{X}$ является пределом последовательности $\{\alpha_n\}$.

Чтобы убедиться в фундаментальности $\{x_n\}$, запишем неравенство

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, \alpha_m) + \rho(\alpha_m, \alpha_n) + \rho(x_n, \alpha_n).$$

Если по данному $\varepsilon > 0$ найти такое N, что при $m, n > N$ имеем $\rho(\alpha_m, \alpha_n) < \varepsilon/3$, а также $1/m < \varepsilon/3$ и $1/n < \varepsilon/3$, то получим, что при $m, n > N$ имеем $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$, что и доказывает фундаментальность $\{x_n\}$.

Покажем, что $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Это равносильно тому, что $\lim_{n\to\infty} \rho(\alpha, \alpha_n) = 0$. Однако же в силу доказанного выше имеем $\alpha = \lim_{n\to\infty} i(x_n)$, то есть $\lim_{n\to\infty} \rho(\alpha, i(x_n)) = 0$. По выбору x_n имеем

$$\rho(\alpha, \alpha_n) \leqslant \rho(\alpha, i(x_n)) + \rho(i(x_n), \alpha_n) \leqslant \rho(\alpha, i(x_n)) + 1/n.$$

Переходя к пределу в «сквозном» неравенстве, получаем то, что нужно. □

Итак, существование пополнения доказано. Остается проверить его единственность. Пусть $(\bar{X}_1, i_1)$ и $(\bar{X}_2, i_2)$ — два пополнения пространства X. Условие $\varphi \circ i_1 = i_2$ однозначно определяет искомое отображение $\varphi\colon \bar{X}_1 \to \bar{X}_2$ на $i(X)$. Если $\alpha \in \bar{X}_1$ и $\alpha = \lim i_1(x_n)$, то, поскольку φ сохраняет расстояния, последовательность $\{\phi(i_1(x_n)) = i_2(x_n)\}$ также фундаментальна, а стало быть, ввиду полноты $\bar{X}_2$, сходится, и предел ее обязан быть равен $\varphi(\alpha)$. Стало быть, отображение φ, если оно существует, определено однозначно с помощью соотношения

$$\varphi(\alpha) = \lim i_2(x_n), \qquad \text{где } \alpha = \lim i_1(x_n). \tag{$*$}$$

Чтобы доказать существование φ, определим это отображение с помощью $(*)$; надо проверить, что так определенное φ не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к α, и что оно сохраняет расстояния и удовлетворяет соотношению $\varphi \circ i_1 = i_2$. Предоставляем читателю провести эти проверки самостоятельно.