Лекция 6. Равномерная сходимость; интеграл

В этой лекции мы введем важные понятия равномерной непрерывности и равномерной сходимости; в качестве приложения мы дадим определение интеграла.

Начнем с равномерной непрерывности. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение из метрического пространства X в метрическое пространство Y. По определению, это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x \in X$ найдется такое $\delta > 0$, что $\rho(f(x), f(y)) < \delta$, как только $\rho(x, y) < \varepsilon$. При этом ε может (при фиксированном δ) зависеть от x: если $X = Y = (0; +\infty)$ и $f(x) = 1/x$, то для того, чтобы гарантировать неравенство $|f(x) - f(y)| < 0{,}1$, достаточно, чтобы $|x - y| < 0{,}1$, если $x \geqslant 2$, тогда как при $0 < x < 1$ такой близости y к x отнюдь не достаточно.

Отображение называется равномерно непрерывным, если этой зависимости δ от x можно избежать:

Определение 6.1. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение метрических пространств. Это отображение называется *равномерно непрерывным,* если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$, как только $\rho(x, y) < \delta$.

Разумеется, каждое равномерно непрерывное отображение является непрерывным, и приведенный выше пример показывает, что обратное неверно. Тем не менее, всякое непрерывное отображение из компактного пространства равномерно непрерывным обязательно будет:

Теорема 6.2. *Пусть X и Y — метрические пространства. Если X компактно и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, то f равномерно непрерывно.*

Доказательство. Согласно определению равномерной непрерывности, зададимся числом $\varepsilon > 0$. Для каждого $a \in Y$ рассмотрим множество $f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(a)) \subset X$. Так как f непрерывно, эти множества открыты и, более того, образуют открытое покрытие пространства X. Поскольку X компактно, можно применить лемму о лебеговом числе (лемма 4.21): существует такое $\delta > 0$, что для всякого $x \in X$ шар $B_\delta(x)$ содержится в одном из множеств $f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(a))$. Покажем, что это δ — искомое. В самом деле, пусть $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ и $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(a))$. Тогда $\rho(f(x), a) < \varepsilon/2$ и $\rho(f(y), a) < \varepsilon/2$, откуда по неравенству треугольника имеем $\rho(x, y) < \varepsilon$, что и требовалось. $\square$

Теперь перейдем к равномерной сходимости. Это — вариация на ту же тему. Именно, пусть $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность функций (скажем, с вещественными значениями) на каком-то множестве X. Предположим, что для всякой точки $x \in X$ существует предел $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Обозначим этот предел $f(x)$, тогда у нас получится функция $f\colon X \to \mathbb{R}$; как говорят, последовательность функций $\{f_n\}$ *поточечно сходится* к функции f:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{для всех } x \in X. \tag{6.1}$$

Расшифровывая определение предела последовательности, получаем, что соотношение (6.1) означает следующее: для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x \in X$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ имеем $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. При этом N может (при фиксированном ε) зависеть от x: если $X = [0;1]$ и функция f_n имеет график как на рис. 6.1, то $f(x)$ равно нулю при $x \neq 0$ и единице при $x = 0$ и, скажем, при $\varepsilon = 0{,}1$ не существует такого N, которое годилось бы для всех $x \in [0;1]$. Сходимость называется равномерной, если от этой зависимости N от x можно уйти:

Определение 6.3. Пусть X — произвольное множество, Y — метрическое пространство. Говорят, что последовательность отображений $f_n\colon X \to Y$ является *равномерно сходящейся* (иногда добавляют для ясности: равномерно сходящейся на X) к отображению $f\colon X \to Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ имеем $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Из нашего обсуждения ясно, что, если последовательность отображений $\{f_n\}$ равномерно сходится к отображению f, то имеет место и поточечная сходимость: для всякого $x \in X$ имеем $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Обратное, как мы только что видели, неверно.

Равномерно сходящиеся последовательности обладают многими хорошими свойствами, которых от поточечно сходящихся последовательностей ожидать не приходится. Например, мы только что видели, что поточечный предел последовательности непрерывных функций может иметь разрывы. С равномерно сходящейся последовательностью эта патология невозможна:

Теорема 6.4. *Пусть X — топологическое пространство, Y — метрическое пространство, и пусть $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность отображений из X в Y, равномерно сходящаяся к отображению $f\colon X \to Y$. Если все $f_n\colon X \to Y$ непрерывны, то и предельное отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно.*

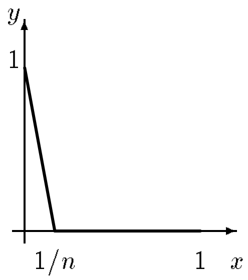

Рис. 6.1. $y = f_n(x)$

Доказательство. Во-первых, отметим, что $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in X$ — это мы уже обсуждали. Чтобы доказать непрерывность функции f, зададимся, согласно определению, числом $\varepsilon > 0$, и пусть $x \in X$. Нам надо доказать, что $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех y, «достаточно близких» к x (то есть лежащих в некотором открытом подмножестве $U \ni x$). Чтобы оценить расстояние между $f(x)$ и $f(y)$, мы доберемся от $f(x)$ до $f(y)$ за три шага.

Во-первых, в силу равномерной сходимости найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ и при всех $z \in X$ имеем $\rho(f(z), f_n(z)) < \varepsilon/3$. Далее, зафиксируем какое-нибудь $n > N$. Ввиду непрерывности функции f_n найдется такое открытое множество $U \ni x$, что $\rho(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon/3$ при всех $y \in U$. Покажем, что для всех $y \in U$ имеем $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. В самом деле:

$$\begin{aligned}\rho(f(x), f(y)) \leqslant \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f_n(y)) + \rho(f(y), f_n(y)) <\\ < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\end{aligned}$$

(первое и третье слагаемые меньше $\varepsilon/3$, так как $\rho(f(z), f_n(z)) < \varepsilon/3$ вообще для всех z). Это доказывает искомую непрерывность. □

Взглянем теперь на равномерную сходимость «с научной точки зрения». Пусть X — топологическое пространство. Рассмотрим множество $B(X)$, состоящее из всех ограниченных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$ (на всякий случай напомним: функция f, определенная на множестве X, называется ограниченной, если существует такое $M > 0$, что $|f(x) \leqslant M$ для всех $x \in X$). Для всякой $f \in B(x)$ положим $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Неотрицательное число $\|f\|$ называется *нормой* функции f (точнее говоря, sup-нормой, но других норм нам в ближайшее время не встретится).

Можно также дословно повторить эти определения, считая, что $B(X)$ — множество ограниченных функций со значениями в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ (а не обязательно в $\mathbb{R}$). Мы не будем вводить для этого случая отдельное обозначение; если для справедливости какого-то утверждения существенно, чтобы функции были со значениями именно в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$), мы будем это явно указывать.

sup-норма обладает следующими свойствами:

Предложение 6.5. *1) Пусть $f \in B(X)$. Тогда $\|f\| = 0$ если и только если функция f равна нулю тождественно.*

2) Если $f \in B(X)$ и λ — константа, то $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$.

3) Если $f, g \in B(X)$, то $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

4) Если $f, g \in B(X)$, то $\|fg\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$.

Доказательства всех этих утверждений можно спокойно предоставить читателю.

Если ввести на множестве $B(X)$ метрику по формуле $\rho(f, g) = \|f - g\|$, то $B(X)$ превратится в метрическое пространство.

Из самого определения sup-нормы вытекает

Утверждение 6.1. *Последовательность функций* $f_n \in B(X)$ *сходится к функции* $f \in B(X)$ *в топологии, определяемой* sup*-нормой, тогда и только тогда, когда эта последовательность сходится к* f *равномерно на* X.

Предложение 6.6. *Пространство* $B(X)$ *является полным.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность ограниченных функций. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{для любого } x \in X \text{ и любых } m, n > N. \tag{6.2}$$

Следовательно, для любого $x \in X$ последовательность чисел $\{f_n(x)\}$ фундаментальна и тем самым сходится. Положим $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Покажем, что $f \in B(X)$ и что последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к f.

Начнем со второго утверждения. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем n как в соотношении (6.2); зафиксировав $n > N$ и перейдя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим, что

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{для любого } x \in X. \tag{6.3}$$

Ввиду произвольности выбора $n > N$, это доказывает равномерную сходимость.

Далее, для того же ε и фиксированного $n \in \mathbb{N}$ неравенство (6.3) влечет $|f(x)| \leqslant |f_n(x)| + \varepsilon$ для всякого $x \in X$. Отсюда $|f(x)| \leqslant \|f_n\| + \varepsilon$ для всякого x, и функция f ограничена. Все доказано. □

До сих пор мы никак не пользовались тем обстоятельством, что X — топологическое пространство, и все сказанное было бы верно и для случая, когда X — произвольное множество. Теперь введем, однако, такое

Обозначение 6.7. Пусть X — топологическое пространство. Через $C(X)$ обозначается множество всех непрерывных и ограниченных функций на X.

Заметим, что множество $C(X) \subset B(X)$ наследует из $B(X)$ норму, метрику и топологию. Заметим также, что, если X компактно, можно определить $C(X)$ просто как множество непрерывных функций на X.

Предложение 6.8. *Пространство* $C(X)$ *замкнуто в* $B(X)$ *и полно.*

Доказательство. Замкнутость вытекает из теоремы 6.4, полнота вытекает из того, что замкнутое подмножество полного метрического пространства будет, очевидно, полным в индуцированной метрике. □

В качестве приложения понятий равномерной сходимости и равномерной непрерывности мы построим простую теорию интегрирования. Реально нам будут нужны интегралы от непрерывных функций (в крайнем случае кусочно-непрерывных), но технически удобнее строить теорию для несколько более широкого класса. Начнем с определений.

Определение 6.9. Пусть $[a;b] \subset \mathbb{R}$ — отрезок. Функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{C}$ называется *кусочно-непрерывной,* если существуют такие числа $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, что функция f непрерывна на каждом интервале $(a_i; a_{i+1})$.

Далее последовательность чисел $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ будем называть *разбиением* отрезка $[a;b]$.

Определение 6.10. Пусть $[a;b] \subset \mathbb{R}$ — отрезок. Функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{C}$ называется *ступенчатой относительно разбиения* $a_1, \dots, a_n$, если существуют такие числа $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, что функция f постоянна на каждом интервале $(a_i; a_{i+1})$. Функция, ступенчатая относительно какого-то разбиения отрезка $[a;b]$, называется просто *ступенчатой* (другой термин — локально-постоянная).

Заметим, что в обоих определениях никаких условий на значения функции в точках a_i не накладывается.

Надо полагать, что читатель знаком с интуитивной трактовкой интеграла по отрезку $[a;b]$ от функции с вещественными значениями как площади фигуры, ограниченной ее графиком, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ (участки фигуры, лежащие ниже оси абсцисс, считаются со знаком минус). Эта интерпретация мотивирует следующее определение интеграла от *ступенчатой* функции:

Определение 6.11. Пусть $[a;b] \subset \mathbb{R}$ –отрезок и $f\colon [a;b] \to \mathbb{C}$ — функция, ступенчатая относительно разбиения $a_1, \dots, a_n$. *Интегралом* от функции f по отрезку $[a;b]$ называется сумма

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \cdot c_i,$$

где c_i — значение функции f на интервале (a_{i-1}, a_i).

Интеграл от ступенчатой функции f по отрезку $[a;b]$ обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$.

Замечание 6.12. Символ dx в обозначении для интеграла представляет собой его неотъемлемую часть; позже мы увидим, чем удобна такая странная запись. Вместо буквы x можно поставить любую другую (одну и ту же под знаком функции и после d).

Предложение 6.13. *Интеграл от кусочно-постоянной функции обладает следующими свойствами:*

1) *Интеграл по отрезку $[a;b]$ от ступенчатой функции f не зависит от выбора разбиения отрезка, относительно которого f будет ступенчатой.*

2) Если f, g — ступенчатые функции на отрезке $[a; b]$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ — константы, то

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

3) Если f — ступенчатая функция на отрезке $[a; b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant (b-a)\|f\|$$

(напомним, что $\|f\| = \sup_{x\in[a;b]} |f(x)|$).

Доказательство. Пункты (1) и (2) предоставляются читателю. Для доказательства пункта (3) заметим, что, если f ступенчата относительно $a_1, \ldots, a_n$ и c_i — ее значение на $(a_{i-1}; a_i)$, то $|c_i| \leqslant \|f\|$ для всех i, так что $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \sum (a_i - a_{i-1})|c_i| \leqslant \sum (a_i - a_{i-1})\|f\|$. □

Теперь распространим определение интеграла на более широкий класс функций.

Определение 6.14. Функция $f\colon [a; b] \to \mathbb{C}$ называется *хорошей* (термин необщепринятый), если она является пределом равномерно сходящейся последовательности ступенчатых функций.

Предложение 6.15. *Всякая функция, непрерывная на отрезке $[a; b]$, является хорошей.*

Доказательство. Пусть f непрерывна на $[a; b]$; достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует ступенчатая функция g, для которой $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$. Это делается следующим образом. Поскольку, ввиду теоремы 6.2, функция f равномерно непрерывна на $[a; b]$, найдется такое число $\delta > 0$, что из неравенства $|x - y| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Пусть теперь $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ — разбиение отрезка $[a; b]$ на отрезки длины, меньшей δ; пусть g — ступенчатая функция, значение которой равно $f(a_i)$ на каждом интервале вида $[a_i; a_{i+1})$, где $0 \leqslant i < n$, и такая, что $g(b) = f(b)$. Тогда функция g, очевидно, будет искомой. □

Следствие 6.16. *Всякая кусочно-непрерывная функция является хорошей.* □

Итак, все интересующие нас функции являются хорошими. Теперь можно дать следующее

Определение 6.17. Пусть $f\colon [a; b] \to \mathbb{C}$ — хорошая функция. *Интегралом* от нее по отрезку $[a; b]$ называется число

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx,$$

где $\{g_n\}$ — какая-то последовательность ступенчатых функций, равномерно сходящаяся к f.

Ситуация с этим определением такая же, как с определением умножения действительных чисел, данным в лекции 3 (определение 3.27): оно нуждается в проверке корректности. Конкретно, надо проверить следующее:

1) Предел последовательности $\{\int_a^b g_n(x)\,dx\}$ существует для любой последовательности ступенчатых функций $\{g_n\}$, равномерно сходящейся к f.

2) Этот предел не зависит от выбора последовательности $\{g_n\}$.

3) Интеграл от ступенчатой функции в смысле старого и нового определения совпадает.

Проверка условия (1). Поскольку последовательность $\{g_n\}$ равномерно сходится, она фундаментальна в пространстве $B([a;b])$. Стало быть, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что $\|g_m - g_n\| < \varepsilon/(b-a)$ для всех $m, n > N$. В силу свойства 6.13(3) имеем тогда, при $m, n > N$,

$$\left|\int_a^b g_m(x)\,dx - \int_a^b g_n(x)\,dx\right| \leqslant (b-a)\cdot\|g_m - g_n\| < \varepsilon,$$

что доказывает фундаментальность, и тем самым сходимость, последовательности $\{\int_a^b g_n(x)\,dx\}$. □

Проверка условия (2). Пусть $\{g_n\}$ и $\{h_n\}$ — две последовательности ступенчатых функций, равномерно сходящиеся к f. Тогда легко видеть, что последовательность $\|g_n - h_n\|$ сходится к нулю (перейдите к пределу в неравенстве $\|g_n - h_n\| \leqslant \|g_n - f\| + \|h_n - f\|$). Поскольку, ввиду свойства 6.13(3), имеем

$$\left|\int_a^b g_n(x)\,dx - \int_a^b h_n(x)\,dx\right| \leqslant (b-a)\|g_n - h_n\|,$$

отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b h_n(x)\,dx$, что и требовалось. □

Проверка условия (3) предоставляется читателю.

Из предложения 6.13 немедленно вытекают такие свойства интеграла от хороших функций:

Предложение 6.18. *Интеграл от хорошей функции обладает следующими свойствами:*

1) *Если f, g — хорошие функции на отрезке $[a;b]$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ — константы, то*
$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx + \mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

2) *Если f — хорошая функция на отрезке $[a;b]$, то*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant (b-a)\|f\|.$$

3) Если f, g — хорошие функции с вещественными значениями и $f(x) \geqslant g(x)$ для всех $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. Пункт (1) предоставляется доказать читателю (не забудьте проверить, что функция $\lambda f + \mu g$ является хорошей). Для доказательства (2) рассмотрим последовательность ступенчатых функций $\{g_n\}$, равномерно сходящуюся к f; переходя к пределу в неравенстве $\left|\int_a^b g_n(x)\,dx\right| \leqslant (b-a)\|g_n\|$ получаем, что $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant (b-a) \cdot \lim_{n\to\infty} \|g_n\|$. Поскольку, как это вытекает из неравенства $|\,\|f\| - \|g_n\|\,| \leqslant \|f - g_n\|$, последовательность $\{\|g_n\|\}$ стремится к $\|f\|$, утверждение (2) доказано.

Утверждение (3) мы докажем лишь для случая, когда функции f и g кусочно непрерывны (в других ситуациях оно нам не понадобится). Ввиду (1), для этого достаточно показать, что интеграл от неотрицательной кусочно-непрерывной функции φ также будет неотрицателен. Из доказательства предложения 6.15 видно, что в этом случае ступенчатые функции g_n, аппроксимирующие φ, можно выбрать неотрицательными, так что интеграл от φ будет неотрицателен как предел последовательности неотрицательных чисел. □

Покажем, наконец, что интеграл «коммутирует с равномерной сходимостью»:

Предложение 6.19. *Если последовательность функций f_n, хороших на отрезке $[a; b]$, равномерно сходится к хорошей функции f, то $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.*

(При желании читатель без труда докажет, что равномерный предел последовательности хороших функций автоматически будет хорошей функцией.)

Доказательство. Ввиду 6.18(2) имеем $\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| \leqslant (b-a)\|f - f_n\|$. Так как правая часть этого неравенства стремится к нулю, все доказано. □

Если заменить равномерную сходимость на поточечную, предложение 6.19 станет неверным; в качестве примера можно рассмотреть последовательность функций $g_n = n f_n$ на отрезке $[0; 1]$, где f_n — функция с рис. 6.1.

Замечание 6.20. Обычно в университетских курсах анализа определяют интеграл («интеграл Римана») для более широкого класса функций, чем наши «хорошие». Для приложений, которые мы имеем в виду, хороших функций хватает, а для более серьезных приложений интеграл Римана все равно недостаточен (нужен интеграл Лебега). Изложенный здесь способ построения элементарной теории интегрирования принадлежит выдающемуся французскому математику Ж. Дьёдонне.