# Лекция 7. Производная

Многое из того, о чем пойдет речь на этой лекции, должно быть вам знакомо (возможно, без доказательств и/или аккуратных формулировок) из школы.

**Определение 7.1.** Пусть $(a;b) \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал и $f\colon (a;b) \to \mathbb{C}$ — функция. *Производной* функции $f$ в точке $c \in (a;b)$ называется предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

(если этот предел существует). Производная функции $f$ в точке $c$ обозначается $f'(c)$.

Функция, имеющая производную в точке $c$, называется *дифференцируемой* в этой точке.

У этого определения имеется переформулировка, очень важная для теории функций нескольких переменных:

**Предложение 7.2.** *Функция $f\colon (a;b) \to \mathbb{C}$ имеет производную в точке $c \in (a;b)$ тогда и только тогда, когда для некоторого числа $C$ выполнено соотношение*

$$f(c+h) = f(c) + Ch + o(|h|) \qquad \text{при } h \to 0.$$

*Если это выполнено, то $f'(c) = C$.*

Смысл записи $o(|h|)$ объяснялся в первом листке с задачами. Доказательство предложения предоставляется читателю в качестве (обязательного) упражнения.

**Следствие 7.3.** *Если функция $f\colon (a;b) \to \mathbb{C}$ дифференцируема в точке $c$, то она и непрерывна в точке $c$.* □

Теперь перечислим известные из школы свойства производных:

**Предложение 7.4.** *1) Если функция $f\colon (a;b) \to \mathbb{C}$ постоянна, то $f'(c) = 0$ для всех $c \in (a;b)$.*

*2) Пусть $f\colon (a;b) \to \mathbb{C}$ и $g\colon (a;b) \to \mathbb{C}$ — функции, дифференцируемые в точке $c$, и пусть $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Тогда функция $\lambda f + \mu g$ дифференцируема в точке $c$, и ее производная равна $\lambda f'(c) + \mu g'(c)$.*

*3) Пусть $f\colon (a;b) \to \mathbb{C}$ и $g\colon (a;b) \to \mathbb{C}$ — функции, дифференцируемые в точке $c$. Тогда функция $fg$ дифференцируема в точке $c$, и ее производная равна $f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.*

*4) Пусть $f\colon (a;b) \to \mathbb{C}$ и $g\colon (a;b) \to \mathbb{C}$ — функции, дифференцируемые в точке $c$, и пусть $g(c) \neq 0$. Тогда функция $f/g$ дифференцируема в точке $c$, и ее производная равна $(f'(c)g(c) - f(c)g'(c))/(g(c)^2)$.*

(По определению, $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$, $fg(x) = f(x)g(x)$, $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.)

Доказательство этого предложения предоставляется в качестве упражнения. Если возникнут трудности — подсмотрите решение в любом учебнике математического анализа (не обязательно университетском — учебник для технических вузов или техникумов подойдет не хуже).

**Предложение 7.5.** *Пусть* $g\colon (a;b) \to (c;d) \subset \mathbb{R}$ *и* $f\colon (c;d) \to \mathbb{C}$ *— две функции, причем* $g$ *дифференцируема в точке* $p \in (a;b)$*, а* $f$ *дифференцируема в точке* $g(p) \in (c;d)$*. Тогда* композиция $f \circ g\colon (a;b) \to \mathbb{C}$*, действующая по правилу* $(f \circ f)(x) = f(g(x))$*, дифференцируема в точке* $p$*, и ее производная в точке* $p$ *равна* $f'(g(p)) \cdot g'(p)$*.*

Это предложение называется «правилом дифференцирования сложной функции». Доказывать его мы также не будем. Читатель может либо провести доказательство самостоятельно (удобно воспользоваться предложением 7.2), либо заглянуть в любой учебник (на сей раз лучше в университетский), либо, наконец, потерпеть до второго семестра, когда это предложение будет доказано в значительно большей общности.

В связи с понятием дифференцируемой функции уместно ввести следующие полезные обозначения:

**Обозначение 7.6.** Пусть $(a;b)$ — открытый интервал на вещественной оси. Будем говорить, что функция $f\colon (a;b) \to \mathbb{C}$ *принадлежит классу* $C^0$, если она непрерывна на $(a;b)$. Для всякого целого $r > 0$ будем говорить, что функция *принадлежит классу* $C^r$, если она дифференцируема на $(a;b)$ и ее производная принадлежит классу $C^{r-1}$. Если функция принадлежит классу $C^r$ для всех $r \geqslant 0$, то будем говорить, что функция *принадлежит классу* $C^\infty$ (или бесконечно дифференцируема).

Иными словами, функции класса $C^r$ — это функции, $r$ раз дифференцируемые, и причем такие, что $r$-тая производная у них непрерывна. Отметим еще, что $r$-тая производная функции $f$ в точке $x$ обозначается $f^{(r)}(x)$.

В школе вас учили правилам исследования функции с помощью производной («на этом интервале производная положительна, так что функция возрастает ... »). Давайте расскажем, как эти правила обосновать.

**Определение 7.7.** Точка $c \in (a;b)$ называется *точкой локального максимума* (соотв. *локального минимума*) функции $f\colon (a;b) \to \mathbb{R}$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что в точке $x$ достигается наибольшее (соотв. наименьшее) значение функции $f$ на интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$. Общее название для локального максимума и локального минимума — *локальный экстремум.*

**Предложение 7.8 (Теорема Ферма).** *Пусть* $f\colon (a;b) \to \mathbb{R}$ *— дифференцируемая функция, и пусть* $c \in (a;b)$ *— точка локального экстремума функции* $f$*. Тогда* $f'(c) = 0$*.*

*Доказательство.* Пусть, для определенности, в точке $c$ имеется локальный максимум, и пусть $\varepsilon > 0$ — число из определения 7.7. Тогда при $h > 0$ имеем $(f(x+h)-f(x))/h \leqslant 0$, а при $h < 0$ имеем $(f(x+h)-f(x))/h \geqslant 0$. Обозначим $(f(x+h)-f(x))/h = \varphi(h)$. Предел $\lim_{h\to 0}\varphi(h)$ совпадает, коль скоро он по условию существует, с пределом при $h \to 0$ функции $\varphi$, ограниченной на интервал $[0;\varepsilon)$, а также с пределом той же функции, ограниченной на $(-\varepsilon;0]$ (в более традиционных обозначениях первый из этих пределов обозначается $\lim_{h\to 0+}\varphi(h)$, а второй $\lim_{h\to 0-}\varphi(h)$). С другой стороны, из выписанных выше неравенств следует, что $\lim_{h\to 0+}\varphi(h) \leqslant 0$, а $\lim_{h\to 0-}\varphi(h) \geqslant 0$. Сопоставляя эти данные, получаем, что $f'(c) = \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0$. □

Итак, «необходимое условие экстремума» доказано. Теперь докажем достаточное условие возрастания. Оно вытекает из следующего факта, важного и сам по себе:

**Предложение 7.9 (Теорема Лагранжа).** *Пусть непрерывная функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $(a;b)$. Тогда сущетсвует такое число $\xi \in (a;b)$, что $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$.*

*Доказательство.* Пусть $p, q \in \mathbb{R}$ — такие числа, что графмк линейной функции $y = px + q$ проходит через точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$. Ясно, что такие $p$ и $q$ существуют, причем $p = (f(b) - f(a))/(b-a)$. Полагая $g(x) = f(x) - px - q$, получаем, что $g(a) = g(b) = 0$. Так как $g$ непрерывна на $[a;b]$, где-то на этом отрезке она достигает наибольшего и наименьшего значения. Заметим, что либо наибольшее, либо наименьшее значение обязательно достигается в какой-то точке $c \in (a;b)$: если и наибольшее, и наименьшее значение достигаются в концах отрезка, то, в силу того, что $g(a) = g(b)$, функция $g$ на отрезке вообще постоянна, но тогда и в любой точке $c \in (a;b)$ достигается наименьшее (оно же наибольшее) значение. Если в точке $c \in (a;b)$ функцция $g$ достигает наименьшего или наибольшего значения, то, в силу предложения 7.8, имеем $g'(c) = 0$, откуда $f'(c) = p$. Подставляя выражение для $p$ и избавляясь от знаменателя, получаем то, что нужно. □

**Следствие 7.10 (теорема Ролля).** *Пусть непрерывная функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $(a;b)$. Если $f(a) = f(b)$, то сущетсвует такое число $\xi \in (a;b)$, что $f'(\xi) = 0$.* □

Из теоремы Лагранжа условие возрастания вытекает немедленно:

**Предложение 7.11.** *Пусть непрерывная функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $(a;b)$. Если $f$ возрастает на $(a;b)$, то $f'(c) \geqslant 0$ для всех $c \in (a;b)$. Напротив, если $f'(c) > 0$ для всех $c \in (a;b)$, то $f$ строго возрастает на $(a;b)$.*

*Доказательство.* Первое утверждение можно смело предоставить читателю. Для доказательства второго утверждения заметим, что, если $a < x < y < b$, то по теореме Лагранжа имеем $f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x) > f(x)$, так как по условию $f'(\xi) > 0$ (здесь $\xi$ — некоторая точка интервала $(x;y)$ ). □

Предоставляем читателю самостоятельно сформулировать условие убывания дифференцируемой функции.

Теперь докажем основную теорему о связи дифференцирования и интегрирования. Для начала чуть обобщим понятие интеграла. Именно, пусть $a < b$ — действительные числа и $f\colon [a;b] \to \mathbb{C}$ — хорошая (в смысле предыдущей лекции) функция. Положим тогда, по определению,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{7.1}$$

Положим также $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

**Предложение 7.12.** *Пусть функция $f$ определена и является хорошей на некотором отрезке, содержащем тоски $a, b, c \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx. \tag{7.2}$$

*Доказательство.* Пусть сначала $a < b < c$. Тогда для ступенчатых функций $f$ равенство очевидно; если же $f$ — произвольная хорошая функция, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдем ступенчатую функцию $g$, для которой $\|f - g\| < \varepsilon$ (имеется в виды sup-норма на $[a; b]$). Тогда из свойства 6.18(2) вытекает, что

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx - \int_a^c f(x)\, dx \right| \leqslant (c-a)\varepsilon;$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что левая часть равна нулю, откуда и вытекает формула (7.2).

В отстальных случаях взаимного расположения $a$, $b$ и $c$ формула (7.2) получается из разобранного случая с помощью формальных манипуляций с использованием формулы (7.1). Предоставляем читателю проделать эти манипуляции самостоятельно. □

Теперь все готово к тому, чтобы доказать один из вариантов знаменитой «формулы Ньютона-Лейбница», устанавливающей связь производной и интеграла.

**Теорема 7.13.** *Пусть $f\colon (a; b) \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция, и пусть $c \in (a; b)$. Определим функцию $F\colon (a; b) \to \mathbb{C}$ по формуле*

$$F(x) = \int_c^x f(x)\, dx.$$

*Тогда для всякого $x \in (a; b)$ имеем $F'(x) = f(x)$.*

*Доказательство.* Для начала сведем все к случаю, когда $f$ — функция с вещественными значениями. В самом деле, если $f(x) = u(x) + iv(x)$, где $u, v\colon (a; b) \to \mathbb{R}$, то, очевидно, вещественная и мнимая части $F(x)$ равны $U(x) = \int_c^x u(x)\, dx$ и $V(x) = \int_c^x v(x)\, dx$ соответственно; с другой стороны, если $U\colon (a; b) \to \mathbb{R}$ и $V\colon (a; b) \to \mathbb{R}$ — вещественная и мнимая части *произвольной* дифференцируемой функции $F\colon (a; b) \to \mathbb{C}$, то, очевидно, $F'(x) = U'(x) + iV'(x)$ для всех $x \in (a; b)$. Стало быть, чтобы доказать нашу теорему для комплексной функции $f$, достаточно доказать ее для вещественных функций $u$ и $v$.

Стало быть, мы можем (и будем) предполагать, что $f\colon (a; b) \to \mathbb{R}$. Зафиксируем $x \in (a; b)$; для всякого $h > 0$ обозначим через $M(h)$ (соотв. $m(h)$) наибольшее (соотв. наименьшее) значение функции $f$ на отрезке $[x; x+h]$; если $h < 0$, то через $M(h)$ и $m(h)$ обозначим наибольшее и наименьшее значение этой функции на $[x - h; x]$.

**Лемма 7.14.** $\lim_{h\to 0} M(h) = \lim_{h \to 0} m(h) = 0$.

*Доказательство леммы.* Так как $f$ непрерывна в точке $x$, для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$ для всех $y \in (x - \delta; x + \delta)$. Стало быть, при $|h| < \delta$ имеем $f(x) - \varepsilon < m(h) \leqslant M(h) < f(x) + \varepsilon$; это и означает, что $m(h)$ и $M(h)$ стремятся к $f(x)$ при $h$, стремящемся к нулю. □

Вернемся к доказательству теоремы. Покажем, что для всякого $h \neq 0$ имеют место неравенства

$$m(h) \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant M(h). \tag{7.3}$$

В самом деле, $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} F(x)\,dx$. Если $h > 0$, то имеем $m(h) \leqslant f(y) \leqslant M(h)$ для всех $y \in [x; x+h]$, откуда, ввиду 6.18(3), имеем

$$m(h) \cdot h \leqslant \int_x^{x+h} F(x)\,dx \leqslant M(h) \cdot h,$$

и деля на $h$, получаем неравенство (7.3); аналогичное рассуждение доказывает это неравенство при $h < 0$.

Устремляя в неравенстве (7.3) $h$ к нулю, получаем, с учетом леммы, наше утверждение. □

Вот другой вариант формулы Ньютона-Лейбница:

**Теорема 7.15.** *Пусть $f\colon [a;b] \to \mathbb{C}$ — функция, непрерывная на некотором открытом множетсве, содержащем $[a;b]$, и пусть функция $F\colon [a;b] \to \mathbb{C}$ обладает тем свойством, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a;b)$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{7.4}$$

*Доказательство.* Как и в доказательстве теоремы 7.13, все сводится к случаю, когда $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$, что мы и будем далее предполагать. Положим $\tilde{F}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. По самому определению $\tilde{F}$ имеем $\int_a^b f(x)\,dx = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a)$. Формула (7.4) будет теперь следовать из того, что разность $\tilde{F}(x) - F(x)$ не зависит от $x$, а это, в свою очередь, немедленно вытекает из следующей леммы:

**Лемма 7.16.** *Пусть непрерывная функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $(a;b)$ и $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a;b)$. Тогда функция $f$ постоянна на $[a;b]$.*

Остается доказать лемму. Для этого заметим, что для всякого $x \in [a;b]$ имеем, в силу предложения 7.9, $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a) = f(a)$. □

Часто формулу (7.4) записывают в таком виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

(запись в правой части означает «вычесть из значения функции $F$ в точке $b$ ее же значение в точке $a$»).

Формула Ньютона-Лейбница открывает широкие возможности для вычисления интегралов в явном виде: для данной функции $f$ достаточно подобрать ее «первообразную» — функцию $F$, для которой $F' = f$, после чего интеграл находится простым вычитанием. В нашем курсе мы не будем останавливаться на вычислениях такого рода, но одно важное следствие из формулы Ньютона-Лейбница все же приведем.

**Предложение 7.17.** *Пусть $f$ и $g$ — функции класса $C^1$ в некоторой окрестности отрезка $[a;b]$. Тогда*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

*Доказательство.* Из формулы для производной произведения (7.4)(3) и формулы Ньютона-Лейбница имеем

$$f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Перенося $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ в левую часть, получаем нашу формулу. □

Формула, которую мы доказали, называется формулой интегрирования по частям.

Наша следующая тема — формула Тейлора. Начнем с мотивировок.

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — «достаточно хорошая» функция (в частности, мы будем предполагать, что у нее есть столько производных, сколько нам нужно). Попробуем «разложить $f$ в степенной ряд» — найти для нее представление вида

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots. \tag{7.5}$$

Сумма в правой части бесконечна, и понимать эту запись следует так:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n).$$

К сожалению, такое разложение вполне может не существовать. Предполагая, тем не менее, что оно существует, попробуем найти его коэффициенты. Проще всего найти $a_0$: полагая $x = 0$ в (7.5), получаем $a_0 = f(0)$. Чтобы найти $a_1$, продифференцируем обе части (7.5):

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_2x^2 + \cdots \tag{7.6}$$

(На самом деле такое дифференцирование ряда не всегда законно, но в нашем прикидочном рассуждении мы эту трудность проигнорируем.) Полагая теперь $x = 0$ в (7.6), находим, что $a_1 = f'(0)$. Аналогичным образом находим и прочие коэффициенты: продифференцировав ряд (7.5) $n$ раз, получаем

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + c_{n+1}x^{n+1} + c_{n+2}x^{n+2} + \cdots,$$

и полагая в этом равенстве $x = 0$, получаем $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

Итак, мы нашли формулу для коэффициентов разложения функции в степенной ряд. Как мы уже отмечали, разложение это может не существовать даже для бесконечно дифференцируемых функций; оказывается, однако, что найденные нами коэффициенты дают если не ряд, то по крайней мере асимптотику:

**Теорема 7.18.** *Пусть функция $f\colon (A;B) \to \mathbb{C}$ принадлежит классу $C^n$ на промежутку $(A;B) \subset \mathbb{R}$, и пусть $a \in (A;B)$. Тогда*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(|x-a|^n) \quad \text{при } x \to a. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Смысл записи $o(|x-a|^n)$ объяснялся в листках с задачами; в данном случае это означает, что, если обозначить через $R(x)$ разность $f(x)-\Bigl(f(a)+f'(a)(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\Bigr)$, то будет иметь место соотношение

$$\lim_{x\to a} R(x)/|x-a|^n = 0.$$

*Доказательство.* Для начала заметим, что достаточно считать, что $f\colon (A;B)\to\mathbb{R}$ (если значения функции комплексные, то воспользуемся теоремой для ее действительной и мнимой частей по отдельности). Считая теперь, что значения функции вещественны и пользуясь только что введенными обозначениями, заметим, что $R(a)=R'(a)=\dots=R^{(n)}(a)=0$. Теперь воспользуемся $n$ раз теоремой Лагранжа (предложение 7.9):

$$\begin{aligned} R(x) &= R'(\xi_1)(x-a) = R''(\xi_2)(x-a)(\xi_1-a) = \dots = \\ &= R^{(n)}(\xi_n)(x-a)(\xi_1-a)\dots(\xi_{n-1}-a), \end{aligned} \tag{7.8}$$

где числа $\xi_1,\dots,\xi_n$ лежат между $x$ и $a$. Поскольку $f$ (и тем самым $R$) принадлежит к классу $C^n$, функция $x\mapsto R^{(n)}(x)$ непрерывна и, стало быть, $\lim_{x\to a}|R^{(n)}(x)| = |R^{(n)}(0)| = 0$. Из (7.8) имеем $|R(x)|\leqslant |R^{(n)}(x)|\cdot|x-a|^n$; деля на $|x-a|^n$ и устремляя $x$ к нулю, получаем то, что нужно. $\square$

Формула (7.7) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*

Если предположить у функции наличие еще одной непрерывной производной, то можно получить больше информации про «остаточный член» $R(x)$. Во-первых, можно дать для него явную формулу:

**Теорема 7.19.** *Пусть $f\colon (A;B)\to\mathbb{C}$ — функция класса $C^{n+1}$. Тогда при $a,x\in(A;B)$ имеем*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\dots++\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ +\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \end{aligned} \tag{7.9}$$

*Доказательство.* Для начала заметим, что $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt$. Применим теперь формулу интегрирования по частям (7.17):

$$\int_a^x f'(t)\,dt = -\int_a^b (x-t)'f'(t)\,dt = -(x-t)f'(t)\Big|_{t=a}^{t=x} + \int_a^b (x-t)f''(t)\,dt.$$

К интегралу в правой части опять применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt = -\int_a^x \left(\frac{(x-t)^2}{2}\right)' f''(t)\,dt = \\ = -\frac{(x-t)^2}{2}f''(t)\Big|_{t=a}^{t=x} + \frac12\int_a^x (x-t)^2 f'''(t)\,dt. \end{aligned}$$

Продолжая в том же духе, проведем интегрирование по частям $n$ раз, а затем последовательно подставим друг в друга полученные выражения для интегралов — получится искомая формула. $\square$

Доказанная формула называется формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Из теоремы 7.19 можно вывести (для вещественнозначных функций) еще одну форму остаточного члена:

**Теорема 7.20.** *Пусть* $f\colon (A;B) \to \mathbb{R}$ *— функция класса* $C^{n+1}$*. Тогда при* $a, x \in (A;B)$ *имеем*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{7.10}$$

*где* $\xi \in \mathbb{R}$ *— некоторое число, лежащее между* $a$ *и* $x$*.*

*Доказательство.* Предположим, чтобы не возиться со знаками, что $x > a$ (если $x < a$, то рассуждения аналогичны). В силу теоремы 7.19 $R(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$. Поскольку функция $f^{(n+1)}$ непрерывна, она достигает в каких-то точках отрезка $[a;x]$ своего наибольшего значения $M$ и наименьшего значения $m$. Отсюда имеем

$$\frac{m}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt \leqslant \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \leqslant \frac{M}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt.$$

Вычисляя интеграл в левой и правой частях этого неравенства, получим, что

$$m/(n+1)! \leqslant R(x) \leqslant M/(n+1)!.$$

Ввилу непрерывности $f^{(n+1)}$, по теореме о промежуточном значении имеем, что $R(x) = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$ для некоторого $\xi \in [a;x]$, что и требовалось. □

Формула (7.10) называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. При $n = 0$ она превращается в теорему Лагранжа.