Лекция 8. Ряды

Рассмотрим пространство $C(X)$ ограниченных непрерывных функций на топологическом пространстве X. Как объяснялось в лекции 6, если его снабдить sup-нормой, то оно станет полным метрическим пространством.

Определение 8.1. *Рядом* называется формальная бесконечная сумма

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots, \tag{8.1}$$

где все f_j лежат в $C(X)$. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ положим $s_n = s_1 + \cdots + s_n$; эта сумма называется *n-ой частичной суммой.*

Ряд (8.1) называется *сходящимся,* если существует предел $\lim_{n\to\infty} s_n$. Этот предел называется *суммой ряда.*

Ряд $f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$ записывают иногда также как $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$.

Замечание 8.2. Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$; ряд $f_1 + f_2 + \cdots$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $f_{n_0} + f_{n_0+1} + \cdots$. В самом деле, последовательности частичных сумм этих двух рядов отличаются друг от дружки сдвигом на константу.

Поскольку каждое число можно рассматривать как постоянную функцию на X, ряды, члены которых — просто числа, также охватываются определением 8.1; «sup-норма» числа — это, конечно, всего лишь его модуль. Можно было бы также считать f_n элементами пространства $B(X)$ ограниченных, но не обязательно непрерывных функций, и вообще элементами любого «полного нормированного векторного пространства».

Критерий Коши для рядов переформулируется следующим образом:

Предложение 8.3. *Ряд $f_1 + \cdots + f_n + \cdots$ сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\|f_n + \cdots + f_{n+m}\| < \varepsilon$ при всех $n > N$ и $m \geqslant 0$.*

Доказательство. В самом деле, сумма под знаком нормы — не что иное, как разность $n+m$-ой и $n-1$-ой частичных сумм, так что все сводится к полноте пространства $C(X)$ (предложение 6.8). □

Определение 8.4. Ряд $f_1 + f_2 + \cdots$ называется *абсолютно сходящимся,* если ряд из норм его членов $\|f_1\| + \|f_2\| + \cdots$ сходится.

Предложение 8.5. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. В силу абсолютной сходимости для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\|f_n\| + \cdots + \|f_{n+m}\| < \varepsilon$ при всех $n > N$ и $m \geqslant 0$. Из неравенства треугольника получаем, что тогда и подавно $\|f_n + \cdots + f_{n+m}\| < \varepsilon$, так что наш ряд сходится по предложению 8.3. □

Заметим, что благодаря доказанному предложению фраза «ряд абсолютно сходится» перестает звучать двусмысленно. Заметим также, что ряд, абсолютно сходящийся по нашему определению, автоматически является равномерно сходящимся.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают многими хорошими свойствами, позволяющими работать с ними почти как с обычными конечными суммами. Первый пример тому — перестановка членов ряда.

Определение 8.6. Пусть $f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$ — ряд. Его *перестановкой* называется ряд $f_{\varphi(1)} + f_{\varphi(2)} + \cdots + f_{\varphi(n)} + \cdots$, где $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — взаимно однозначное отображение множества натуральных чисел на себя; мы будем называть такие функции *перестановками множества* $\mathbb{N}$.

Говоря более простым языком, перестановка членов ряда — это ряд, в котором те же самые функции записаны в другом порядке, при этом в новом ряде все члены старого встречаются, причем ровно по одному разу. Например, ряд

$$f_1 + f_3 + f_5 + f_2 + f_7 + f_9 + f_{11} + f_4 + f_{13} + f_{15} + f_{17} + f_6 + \cdots$$

(три нечетных, одно четное, три нечетных, одно четное, ...) — перестановка ряда $f_1 + f_2 + f_3 + \cdots$.

Предложение 8.7. *Пусть $f_1 + \cdots + f_n + \cdots$ — абсолютно сходящийся ряд, и пусть φ — перестановка множества $\mathbb{N}$. Тогда ряд $f_{\varphi(1)} + f_{\varphi(2)} + \cdots + f_{\varphi(n)} + \cdots$ также абсолютно сходится, причем к той же сумме.*

Доказательство. Начнем с леммы, относящейся к так называемым *рядам с положительными членами* — так принято называть ряды, составленные из *неотрицательных* вещественных чисел.

Лемма 8.8. *Пусть $a_1 + \cdots + a_n + \cdots$ — ряд с положительными членами, сходящийся к числу $s \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$s = \sup_{\substack{M \subset \mathbb{N} \\ M \text{ конечно}}} S_M, \qquad \text{где } S_M = \sum_{i \in M} a_i. \tag{8.2}$$

Иными словами, сумма ряда с положительными членами есть точная верхняя грань всех сумм конечного числа членов ряда. Более того, ряд $a_1 + \cdots + a_n + \cdots$ сходится тогда и только тогда, когда правая часть (8.2) *конечна.*

Доказательство леммы. Обозначим правую часть (8.2) через S. Поскольку $s = \sup_{n \in \mathbb{N}}(a_1 + \cdots + a_n)$, имеем $s \leqslant S$. Поскольку, с другой стороны, для всякого конечного подмножества $M \subset \mathbb{N}$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $M \subset [1; n]$, так что $S_M \leqslant s_n$, где s_n — n-ая частичная сумма. Отсюда имеем противоположное неравенство $S \leqslant s$, что и доказывает лемму. $\square$

Из доказанной леммы ясно, что наше предложение верно для рядов с положительными членами. Следовательно, уже в общем случае, из абсолютной сходимости ряда вытекает абсолютная сходимость любой его перестановки. Осталось показать, что суммы исходного и переставленного рядов совпадают. Пусть u_n — n-ая частичная сумма переставленного ряда $f_{\varphi(1)} + f_{\varphi(2)} + \cdots + f_{\varphi(n)} + \cdots$. Чтобы это доказать, зафиксируем какую-нибудь последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$, стремящуюся к нулю. Сейчас мы построим такие возрастающие последовательности натуральных чисел $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$, что $\|s_{m_k} - u_{n_k}\| \leqslant \varepsilon_k$; из этого будет следовать, что $\lim s_{m_k} = \lim u_{n_k}$, а так как пределы в левой и правой частях этого равенства равны, очевидно, суммам исходного и переставленного рядов, доказательство на этом завершится.

Построим теперь искомые последовательности натуральных чисел. Заметим прежде всего, что, ввиду абсолютной сходимости, для любого $n \in \mathbb{N}$ сходится ряд $\|f_{n+1}\| + \|f_{n+2}\| + \cdots$, причем, если обозначить его сумму через σ_n, имеем $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$. Определим теперь m_k и n_k по индукции: если $m_1, \ldots, m_k$ и $n_1, \ldots, n_k$ уже определены, определим m_k как какое-нибудь число $l \in \mathbb{N}$, большее всех $m_1, \ldots, m_{k-1}$ и такое, что $\sigma_l < \varepsilon_k$; определим также n_k как такое число $r \in \mathbb{N}$, что $\{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(r)\} \supset \{1, 2, \ldots, m_k\}$. Теперь, поскольку $u_{n_k} - s_{m_k}$ есть сумма членов исходного ряда с номерами, большими m_k, норма этой разности не превосходит $\sigma_{m_k} < \varepsilon_k$. Все доказано. $\square$

Условие абсолютной сходимости в этом предложении отбросить нельзя. Приведем

Пример 8.9. Рассмотрим ряд

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots \tag{8.3}$$

Заметим, во-первых, что он сходится: в самом деле, обозначая n-ую частичную сумму через s_n, имеем, очевидно, $s_1 \geqslant s_3 \geqslant s_5 \ldots$ и $s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \ldots$, и $s_{2m-1} \geqslant s_{2m}$ для всех $m \in \mathbb{N}$; значит, последовательности $\{s_{2m-1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ и $\{s_{2m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ сходятся, будучи монотонно возрастающими и ограниченными, а поскольку их разность s_{2m} стремится к нулю, эти два предела равны и являются пределом частичных сумм нашего ряда. (Приведенное рассуждение слово в слово переносится на более общий случай: ряд, члены которого — вещественные числа, абсолютные величины которых монотонно убывают и стремятся к нулю, а знаки чередуются, обязательно сходится; это утверждение называется признаком Лейбница.) Абсолютная сходимость ряда (8.3) места не имеет, так как $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Покажем теперь, как переставить члены в ряде (8.3), чтобы он стал расходиться. Для этого заметим, что ряд, составленный из положительных членов нашего ряда, расходится, а все отрицательные члены нашего ряда по модулю меньше единицы. Теперь переставим ряд так: сначала поставим только положительные члены в таком количестве, чтобы их сумма была больше 11, затем поставим $(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ — частичная сумма будет больше 10, затем добавим столько следующих положительных членов, чтобы частичная сумма стала больше 21, затем $(-\frac{1}{\sqrt{4}})$ — частичная сумма будет больше 20, затем столько следующих положительных членов, чтоб частичная сумма стала больше 31, затем $(-\frac{1}{\sqrt{6}})$, и т. д. Легко видеть, что частичные суммы полученного ряда стремятся к $+\infty$ (и уж совсем очевидно, что они неограниченны), так что переставленный ряд расходится.

Немного уточняя эти рассуждения, нетрудно показать, что, переставляя члены неабсолютно сходящегося ряда из вещественных чисел, можно добиться, чтобы последовательность частичных сумм имела любые наперед заданные верхний и нижний пределы.

Теперь покажем, что для бесконечных сумм, если под суммой понимать абсолютно сходящийся ряд, верен и сочетательный закон сложения.

Предложение 8.10. *Пусть $\{f_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ — семейство элементов пространства $C(X)$, занумерованное парами натуральных чисел. Предположим, что рад $\sum_{m,n\in\mathbb{N}} f_{mn}$ абсолютно сходится, и пусть f — его сумма (ввиду предложения 8.7 ни абсолютная сходимость, ни f не зависят от того, в каком порядке пронумеровать пары $(m;n)$). Тогда для каждого $m\in\mathbb{N}$ абсолютно сходятся ряды $\sum_{i\in\mathbb{N}} f_{mi}$ (обозначим его сумму h_m) и $\sum_{i\in\mathbb{N}} f_{im}$ (обозначим его сумму v_m). Далее, ряды $\sum_m h_m$ и $\sum_m v_m$ оба абсолютно сходятся к $f=\sum_{m,n\in\mathbb{N}} f_{mn}$.*

Иными словами, сумму элементов абсолютно сходящейся бесконечной матрицы можно подсчитать, найдя суммы каждой строки (или каждого столбца) и сложив все эти суммы.

Доказательство. Пусть $\Sigma=\sum_{i,j}\|f_{ij}\|$. Для всякого m имеем $\sum_i\|f_{mi}\|\leqslant\Sigma$, $\sum_i\|f_{im}\|\leqslant\Sigma$ (так что абсолютно сходятся все строки и все столбцы); так как $\|h_m\|\leqslant\sum_i\|f_{mi}\|$, то $\sum_m\|h_m\|\leqslant\Sigma$, и ряд $\sum h_m$ (а также, естественно, $\sum v_m$) также абсолютно сходится.

Докажем теперь, что $\sum h_m=f$ (доказательство для $\sum v_m$ аналогично). Для этого перенумеруем пары натуральных чисел так:

$$(1,1),\ (1,2),(2,2),(2,1),\ (1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1),$$
$$(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(4,3),(4,2),(4,1)\dots.$$

Тогда, ввиду абсолютной ряда $\sum_{m,n}\|f_{mn}\|$, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $N\in\mathbb{N}$, что $\sum_{\substack{i>n\\ \text{или } j>n}}\|f_{ij}\|\leqslant\varepsilon/2$, откуда $\|f-\sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} f_{ij}\|\leqslant\varepsilon/2$. С другой стороны, $\|\sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} f_{ij}-\sum_{i=1}^n h_i\|\leqslant\sum_{\substack{i\leqslant n\\ j>n}}\|f_{ij}\|\leqslant\varepsilon/2$. Следовательно, при всех $n\geqslant N$ имеем $\|\sum_{i=1}^n h_i-f\|\leqslant\varepsilon$, что и требовалось. □

Доказанное предложение является дискретным аналогом (а также частным случаем) «теоремы Фубини» из теории меры.

Следующее хорошее свойство абсолютно сходящихся рядов относится к умножению рядов. Сначала, как водится, — мотивировки.

Предположим, что у нас имеются два «степенных ряда» вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ и $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$. Если их перемножить и привести подобные члены (чисто формально), то получится ряд вида

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots \\ + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n + \cdots. \quad (8.4)$$

Обобщая (8.4) на произвольные ряды, получаем такое

Определение 8.11. Пусть $f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$ и $g_1 + g_2 + \cdots + g_n + \cdots$ — два ряда. Их *произведением* называется ряд $h_1 + h_1 + \cdots + h_n + \ldots$, где $h_n = f_0g_n + f_1g_{n-1} + \cdots + f_ng_0$.

$$\begin{array}{cccccccc}
n & \circ & \circ & \circ & \ldots & \circ & \circ \\
n-1 & \bullet & \circ & \circ & \ldots & \circ & \circ \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots & & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
3 & \bullet & \ldots\ldots\ldots & & & \circ & \circ \\
2 & \bullet & \bullet & \ldots\ldots & & \circ & \circ \\
1 & \bullet & \bullet & \bullet & \ldots & \bullet & \circ \\
 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n
\end{array}$$

Рис. 8.1. Произведение рядов

Предложение 8.12. *Пусть* $f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$ *и* $g_1 + g_2 + \cdots + g_n + \cdots$ *— два сходящихся ряда, один из которых сходится абсолютно, и пусть* $h_1 + h_1 + \cdots + h_n + \ldots$ *— их произведение. Тогда ряд* $\sum h_i$ *также сходится, причем его сумма равна произведению сумм рядов* $\sum f_i$ *и* $\sum g_i$.

Если ряды $\sum f_i$ *и* $\sum g_i$ *сходятся абсолютно, то и их произведение сходится абсолютно.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что ряд $\sum f_i$ абсолютно сходится, что мы и будем далее предполагать. Пусть u_n, v_n и w_n — n-ая частичная сумма ряда $\sum f_i$, $\sum g_i$ и $\sum h_i$ соответственно.

Очевидно, заведомо существует (и равен произведению сумм рядов $\sum f_i$ и $\sum g_i$) предел $\lim_{n\to\infty} u_iv_i$. Если на рис. 8.1 кружок на пересечении i-той строки и j-того столбца обозначает произведение f_ig_j, то u_nv_n — сумма всех кружков, а w_n — сумма всех черных кружков. Нам достаточно доказать, что сумма белых кружков стремится к нулю при $n \to \infty$. Обозначим эту сумму через Δ_n. Чтоб оценить Δ_n, нам придется разбить ее на две части и разобраться с ними по отдельности. Именно, пусть $n = k + l$ ($k, l \in \mathbb{N}$). Пусть S_1 — сумма белых кружков с абсциссами, не превосходящими k, а S_2 — сумма белых кружков с абсциссами, большими k. Очевидно, $\|\Delta_n\| \leqslant \|S_1\| + \|S_2\|$.

Имеем $S_1 = f_1g_{l+k} + f_2(g_{l+k-1} + g_{l+k}) + \cdots + f_k(g_{l+1} + g_{l+2} + \cdots + g_{l+k})$. Поскольку ряд $\sum f_i$ абсолютно сходится, существует такая не зависящая от k

константа $M > 0$, что $\|f_1\| + \cdots + \|f_k\| \leqslant M$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Из неравенства треугольника и неравенства $\|fg\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$ (см. лекцию 6) имеем теперь

$$\begin{aligned}\|S_1\| &\leqslant \|f_1\| \cdot \|g_{l+k}\| + \|f_2\| \cdot \|g_{l+k-1} + g_{l+k}\| + \|f_k\| \cdot \|g_{l+1} + g_{l+2} + \cdots + g_{l+k}\| \leqslant \\ &\leqslant (\|f_1\| + \cdots + \|f_k\|) \cdot \max(\|g_n\|, \|g_{n-1} + g_n\|, \ldots, \|g_{l+1} + \cdots + g_n\|) \leqslant \\ &\leqslant M \cdot \max(\|g_n\|, \|g_{n-1} + g_n\|, \ldots, \|g_{l+1} + \cdots + g_n\|).\end{aligned} \tag{8.5}$$

Сумму S_2 оценим вот как:

$$S_2 = f_{k+1}(g_l + \cdots + g_n) + f_{k+2}(g_{l-1} + \cdots + g_n) + \cdots + f_{k+l}(g_1 + \cdots + g_n);$$

поскольку ряд $\sum g_i$ сходится, нормы его частичных сумм (а стало быть, и нормы попарных разностей частичных сумм) ограничены, так что существует такая константа $L > 0$, что $\|g_i + g_{i+1} + \cdots + g_j\| \leqslant L$ для любых i и j; поэтому

$$\begin{aligned}\|S_2\| &\leqslant \|f_{k+1}\| \cdot \|g_l + \cdots + g_n\| + \cdots + \|f_{k+l}\| \cdot \|g_1 + \cdots + g_n\| \leqslant \\ &\leqslant (\|f_{k+1}\| + \|f_{k+2}\| + \cdots + \|f_{k+l}\|) \cdot L.\end{aligned} \tag{8.6}$$

Поскольку ряды $\sum g_i$ и $\sum \|f_i\|$ сходятся, для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие l_0 и k_0, что $\|g_{l+1} + \cdots + \|g_{l+r}\| \leqslant \varepsilon/2M$ при всех $l \geqslant l_0$ и $\|f_{k+1}\| + \|f_{k+2}\| + \cdots + \|f_{k+l}\| \leqslant \varepsilon/2L$ при всех $k \geqslant k_0$. Если теперь $n \geqslant l_0 + k_0$, то число n представимо в виде $k + l$, где $k \geqslant k_0$ и $l \geqslant l_0$; тогда из (8.5) и (8.6) получаем

$$\|\Delta_n\| \leqslant \|S_1\| + \|S_2\| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L = \varepsilon.$$

Значит, $\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0$, что и требовалось.

Утверждение об абсолютной сходимости произведения абсолютно сходящихся рядов читатель легко докажет самостоятельно. □

Пример 8.13. Если ни один из перемножаемых рядов не является абсолютно сходящимся, предложение 8.12 перестает быть верным. Пусть, скажем, $\sum f_i$ и $\sum g_i$ — один и тот же знакомый нам ряд $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$. Тогда $n+1$-ый член ряда-произведения равен

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1}}\right),$$

то есть сумме n слагаемых одного знака, каждое из которых по модулю не меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{(n+1)/2}\cdot\sqrt{(n+1)/2}} = 2/(n+1)$. Стало быть, общий член к нулю не стремится и произведение рядов расходится.