Лекция 9. Элементарные функции

Теперь мы, наконец, можем дать строгие определения показательной, логарифмической и тригонометрических функций. Начнем с показательной, причем сразу для произвольных комплексных значений аргумента.

Определение 9.1. *Экспонентой* комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ называется число

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \tag{9.1}$$

Разумеется, надо еще доказать, что ряд (9.1) сходится, что мы сейчас и сделаем:

Предложение 9.2. *Ряд* (9.1) *сходится абсолютно в* sup-*метрике (и тем самым равномерно) на любом замкнутом круге* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$, *где* $R > 0$.

Доказательство. Очевидно, $\|z^n/n!\| = R^n/n!$, так что надо доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} R^n/n!$ сходится при любом $R > 0$. Ввиду замечания 8.2 эта сходимость равносильна сходимости ряда $\sum_{n=n_0}^{\infty} R^n/n!$ для какого-нибудь $n_0 \in \mathbb{N}$.

Лемма 9.3. $\lim_{n\to\infty} a^n/n! = 0$ *для всех* $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство леммы. Достаточно доказать для $a > 0$; пусть $m \in \mathbb{N}$ таково, что $m > a$. Тогда при всех $n > m$ имеем $a^n/n! \leqslant (a^m/m!)(a/m)^{n-m}$, и правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$. □

Выберем теперь $R' > R$; по лемме имеем $n! \geqslant R'^n$ для всех $n \geqslant n_0$ при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$, откуда при тех же n имеем $R^n/n! \leqslant (R/R')^n$. Следовательно, частичные суммы ряда $\sum_{n=n_0}^{\infty} R^n/n!$ ограничены в силу формулы для суммы геометрической прогрессии, откуда требуемая сходимость очевидна. □

Замечание 9.4. На всем $\mathbb{C}$ (или на всем $\mathbb{R}$) равномерная сходимость ряда (9.1) места не имеет.

Из доказанного или прямо из определения вытекают такие простейшие свойства экспоненты:

Предложение 9.5. *(1) Функция* $z \mapsto \exp(z)$ *непрерывна.*

(2) $\exp(0) = 0$*; если* $x \in \mathbb{R}$*, то* $\exp(x) \in \mathbb{R}$.

(3) $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ *(черта означает комплексное сопряжение).*

Основное свойство экспоненты таково:

Предложение 9.6. *Для любых комплексных чисел z и w имеем $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$.*

Доказательство. Если перемножить (в смысле определения 8.11) ряды для $\exp(z)$ и $\exp(w)$, то n-ый член произведения будет равен

$$\frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1}w}{(n-1)!1!} + \frac{z^{n-2}w^2}{(n-2)!2!} + \cdots + \frac{w^n}{n!},$$

что в силу формулы бинома Ньютона равно $(z+w)^n/n!$; стало быть, в произведении получится ряд для $\exp(z+w)$. Если $R > \max(|z|,|w|)$, то в круге с центром в нуле и радиуса R ряды для $\exp(z)$ и $\exp(w)$ сходятся абсолютно, стало быть, ввиду предложения 8.12, их произведение сходится к $\exp(z)\exp(w)$, что и требовалось. $\square$

Следствие 9.7. *(1) Если $x \in \mathbb{R}$, то $\exp(x) > 0$.*

(2) $\lim_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$.

Доказательство. (1): если $x \geqslant 0$, то это очевидно; если $x < 0$, воспользуемся тем, что, ввиду предложения 9.6, $\exp(x) = 1/\exp(-x)$.

(2): при $x > 0$ имеем, очевидно, $\exp(x) > 1 + x$, откуда вытекает первое равенство. Второе равенство следует из тождества $\exp(-x) = 1/\exp(x)$. $\square$

Теперь покажем, что экспонента дифференцируема, и подсчитаем ее производную.

Предложение 9.8. *Функция* $\exp$*, рассматриваемая как функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, дифференцируема; ее производная в точке $x \in \mathbb{R}$ равна* $\exp(x)$*.*

Доказательство. Если формально взять производную от ряда (9.1) (от каждого слагаемого), то получится тот же самый ряд. Таким образом, равенство $\exp'(x) = \exp(x)$ было бы доказано, если бы мы знали, что правило «производная суммы равна сумме производных» распространяется и на бесконечные суммы, то бишь ряды. В буквально такой формулировке это утверждение неверно даже для абсолютно (и равномерно) сходящегося ряда, составленного из C^∞-функций: последовательность $\{(\sin n^2x)/n^2\}$ равномерно сходится к нулю (а ряд, частичные суммы которого являются членами этой последовательности, сходится к тому же и абсолютно), но последовательность ее производных не сходится к нулю даже поточечно. Если, однако, равномерно сходится *ряд из производных,* то почленно дифференцировать уже можно:

Предложение 9.9. *Пусть* $\sum f_n$ *— ряд* C^1*-функций на интервале* $(a;b) \subset \mathbb{R}$*, сходящийся поточечно к функции* f*. Если ряд из производных* $\sum f_n'$ *сходится на* $(a;b)$ *равномерно к функции* φ*, то* $f'(x) = \varphi(x)$ *для всех* $x \in (a;b)$.

Доказательство предложения 9.9. Зафиксируем $x_0 \in (a;b)$; по предложению 6.19 и формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_i'(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = f(x),$$

так что $f'(x) = \varphi(x)$ опять-таки по формуле Ньютона-Лейбница. □

Ввиду предложения 9.2 условия доказанного предложения в нашем случае выполнены, так что все доказано. □

Следствие 9.10. *Функция* $x \mapsto \exp(x)$*, где* $x \in \mathbb{R}$*, является строго возрастающей и задает взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством положительных действительных чисел.*

Доказательство. Это немедленно следует из предложений 7.11 и 9.7(2) и теоремы о промежуточном значении. □

Определение 9.11. Пусть x — положительное действительное число. Его *натуральным логарифмом* называется такое действительное число y, что $\exp(y) = x$. Обозначение: $y = \ln x$.

Ввиду следствия 9.10 это определение корректно.

Предложение 9.12. *Функция* $x \mapsto \ln x$ *дифференцируема на множестве положительных действительных чисел; ее производная в точке* x *равна* $1/x$.

Доказательство. Пусть $[a;b] \subset \mathbb{R}$. Тогда отображение $\exp\colon [a;b] \to [\exp(a);\exp(b)]$ непрерывно и взаимно однозначно; так как отрезок компактен, при этом отображении замкнутые множества переходят в замкнутые (см. лекцию 4), а так как оно взаимно однозначно, из этого следует, что дополнения замкнутых множеств переходят в дополнения замкнутых множеств, то есть открытые подмножества переходят в открытые; стало быть, при обратном отображении $\ln\colon [\exp(a);\exp(b)] \to [a;b]$ прообразы открытых множеств открыты, то есть отображение $\ln$ непрерывно. (Точно такое же рассуждение доказывает, что обратная к любой непрерывной строго монотонной функции будет непрерывной.)

Теперь, чтобы подсчитать производную логарифма в точке x, запишем, полагая $x = \exp(y)$ и $x_1 = \exp(y_1)$:

$$\lim_{x_1\to x} \frac{\ln x_1 - \ln x}{x_1 - x} = \lim_{y_1\to y} \frac{y_1 - y}{\exp(y_1) - \exp(y)} = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x}.$$

Только что доказанная непрерывность логарифма была использована в первом равенстве из нашей цепочки. □

Следствие 9.13. $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$. □

Для логарифма также можно получить разложение в степенной ряд:

Предложение 9.14. *Для всякого $x \in (-1; 1)$ имеет место разложение*

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots . \tag{9.2}$$

На всяком отрезке $[a; b] \subset (-1; 1)$ этот ряд сходится абсолютно (по sup-*норме).*

Доказательство. На всяком отрезке $[a; b] \subset (-1; 1)$ сходится абсолютно (по sup-норме) ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots .$$

В силу предложения 6.19 этот ряд можно почленно проинтегрировать от нуля до любого t, где $|t| < 1$, откуда получаем разложение (9.2). Поскольку на отрезке $[-r; r] \subset (-1; 1)$ имеем $\|x^n/n\| = r^n/n \leqslant r^n$, абсолютная сходимость ряда (9.2) следует из сходимости бесконечно убывающей геометрической прогрессии. □

На самом деле равенство (9.2) имеет место и при $x = 1$. Иными словами,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Доказательства этого факта мы опустим.

Замечание 9.15. Мы не случайно определили логарифм, в отличие от экспоненты, только для положительных действительных чисел. Отображение $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ является универсальным накрытием неодносвязного пространства $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, так что обратного к нему, определенного на всем $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, нет и быть не может.

Теперь ничего не стоит определить степень с произвольным положительным основанием:

Определение 9.16. Пусть $a > 0$ — положительное действительное число, z — произвольное комплексное число. Положим по определению $a^z = \exp(z \ln a)$. Если $x \in \mathbb{R}$ и $x > 0$, положим $\log_a x = \ln x / \ln a$. Положим, наконец, $e = \exp(1)$.

Предоставляем читателю доказать известные из школы свойства логарифмической и показательной функций. Проверьте также, что $\ln e = 1$, $\log_e x = \ln x$ и $\exp(x) = e^x$.

Перейдем к тригонометрическим функциям.

Определение 9.17. Для $x \in \mathbb{R}$ положим по определению $\cos x = \operatorname{Re}(\exp(ix))$, $\sin x = \operatorname{Im}(\exp(ix))$, $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$.

Хорошо знакомые свойства тригонометрических функций проверяются легко:

Предложение 9.18. *Для тригонометрических функций выполнены такие тождества:*

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1; \tag{9.3}$$

$$\sin(-x) = -\sin x; \quad \cos(-x) = \cos x; \tag{9.4}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \tag{9.5}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \tag{9.6}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \tag{9.7}$$

Доказательство. (9.3) вытекает из того, что $\exp(0) = 1$. Чтобы доказать (9.4), достаточно заметить, что, ввиду предложения 9.5(3), при $x \in \mathbb{R}$ имеем $\exp(-ix) = \overline{\exp(ix)}$; из этого же тождества следует, что, опять-таки при $x \in \mathbb{R}$, имеем $|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = 1$, откуда получаем (9.5). Наконец, (9.6) и (9.7) получатся, если отделить действительную и мнимую часть в тождестве $\exp(i(x+y)) = \exp(ix) \cdot \exp(iy)$. $\square$

Из тождеств (9.3–9.7) чисто формально выводятся все прочие тригонометрические тождества (вспомните, как это делалось в школе), кроме формул приведения, о которых речь пойдет чуть позже.

Простейшие аналитические свойства тригонометрических функций также получаются из нашего определения немедленно:

Предложение 9.19. *Функции* $\sin$ *и* $\cos$ *дифференцируемы; для* $x \in \mathbb{R}$ *имеем* $\sin'(x) = \cos x$, $\cos'(x) = -\sin x$. *Для синуса и косинуса имеются разложения в степенные ряды*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots; \tag{9.8}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots, \tag{9.9}$$

причем эти ряды сходятся абсолютно по sup*-норме на каждом отрезке.*

Доказательство. Из предложения 9.8 и правила дифференцирования сложной функции следует, что производная функции $t \mapsto \exp(it)$ в точке $x \in \mathbb{R}$ равна $i\exp(ix)$; отделяя вещественную и мнимую часть, получаем формулы для производных синуса и косинуса.

Полагая в ряде для экспоненты $z = ix$, получаем, что

$$\exp(ix) = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots;$$

из предложения 8.10 следует, что ряды

$$C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots,$$
$$S(x) = ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}i\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

абсолютно сходятся на любом отрезке, причем $\exp(x) = C(x) + S(x)$. Поскольку, очевидно, число $C(x)$ вещественное, а $S(x)$ — чисто мнимое, получаем, что $C(x) = \mathrm{Re}(\exp(x)) = \cos x$ и $S(x) = i\,\mathrm{Im}(\exp(x)) = i\sin x$. Все доказано. $\square$

Разберемся с формулами приведения.

Предложение 9.20. *У уравнения* $\cos x = 0$ *имеется наименьший положительный корень, обозначаемый* $\pi/2$. *Имеем* $\sin(\pi/2) = 1$, *причем на отрезке* $[0; \pi/2]$ *синус монотонно возрастает, а косинус монотонно убывает.*

Доказательство. Мы знаем из формулы (9.3), что $\cos 0 = 1$. Покажем, что $\cos 2 < 0$. В самом деле, из разложения (9.8) имеем

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \cdots = -\frac{1}{3} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!} + \frac{2^{10}}{10!} - \cdots\right). \tag{9.10}$$

Представим ряд в скобках в виде

$$\left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) + \left(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!}\right) + \left(\frac{2^{14}}{14!} - \frac{2^{16}}{16!}\right)\cdots.$$

Поскольку при $n \geqslant 6$ имеем, очевидно, $2^n/n! > 2^{n+2}/(n+2)!$, все слагаемые в скобках положительны, откуда и из 9.10 имеем $\cos 2 < -\frac{1}{3} < 0$.

Поскольку $\cos 0 = 1 > 0$, теорема о промежуточном значении показывает, что уравнение $\cos x = 0$ имеет положительные корни. Положим теперь $c = \inf\{\, x > 0 \mid \cos x = 0 \,\}$. Так как косинус — непрерывная функция, то множество ее корней замкнуто (как прообраз замкнутого множества $\{0\}$), так что $\cos c = 0$, откуда $c > 0$ и c — наименьший положительный корень уравнения $\cos x = 0$. Положим, как это принято, $c = \pi/2$. Тогда косинус положителен на интервале $(0; \pi/2)$; так как косинус — производная синуса, синус возрастает на этом интервале и, стало быть (так как $\sin 0 = 0$) положителен на нем. Так как $\sin^2(\pi/2) + \cos^2(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$ и $\sin(\pi/2) > 0$, получаем, что $\sin(\pi/2) = 1$. Так как $\cos'(x) = -\sin x$ и $\sin x > 0$ на $(0; \pi/2)$, косинус на этом интервале убывает. □

Следствие 9.21. *Для тригонометрических функций верны формулы приведения (в частности, синус и косинус периодичны с периодом 2π); верны также все известные из школы утверждения о знаках и интервалах монотонности синуса и косинуса.*

Доказательство. Формулы приведения следуют из формул для синуса и косинуса суммы и того, что $\sin(\pi/2) = 1$ и $\cos(\pi/2) = 0$. Утверждения о знаках и интервалах монотонности следуют из формул приведения и предложения 9.10. □

Следствие 9.22. *Функция* exp *периодична с периодом $2\pi i$.*

Доказательство. Это следует из предложения 9.6 и того, что $\exp(2\pi i) = 1$. □

Покажем, что отображение $t \mapsto \exp(it)$ действительно осуществляет «наматывание» числовой оси на единичную окружность, которое используется при наивном определении тригонометрических функций числового аргумента. Во-первых:

Предложение 9.23. *Отображение $t \mapsto \exp(it)$ индуцирует взаимно однозначное отображение интервала $[0; 2\pi)$ на единичную окружность $\{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$.*

Доказательство. Если отождествить комплексное число $x + iy$ с точкой $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, то отображение φ запишется как $t \mapsto (\cos t; \sin t)$. Из монотонности и непрерывности косинуса на отрезке $[0; \pi/2]$ следует, что при $t \in [0; \pi/2]$ число $\mathrm{Re}(\exp(it))$ принимает каждое значение в интервале $[0; 1]$ ровно один раз; если точка $x + iy$ принадлежит единичной окружности, то y определяется по x однозначно, с точностью до знака, так что φ индуцирует взаимно однозначное отображение отрезка $[0; \pi/2]$ на множество $\{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geqslant 0, \mathrm{Im}(z) \geqslant 0 \,\}$. Аналогично рассматриваются отрезки $[\pi/2; \pi]$, $[\pi; 3\pi/2]$, и т.д. □

Теперь покажем, что при отображении $t \mapsto \exp(it)$ точка за время t проходит путь t — это и будет означать, что наматывание числовой оси на окружность происходит «без растяжений и сжатий». Для начала уточним, что такое «путь, пройденный точкой», иными словами, что такое длина кривой. Для большинства разумных целей подходят такие определения. *Кривой на плоскости* называется отображение $\varphi\colon [a;b] \to \mathbb{R}^2$, действующее по формуле $t \mapsto (x(t), y(t))$, где x и y — функции класса C^1. Поскольку вектор скорости точки, движущейся по закону $t \mapsto \varphi(t)$, равен $(x'(t); y'(t))$ в момент t, путь, пройденный точкой, естественно считать равным интегралу от длины вектора скорости, то есть $\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$. Этот интеграл и полагают равным длине кривой; нетрудно показать, что длина не зависит от выбора параметризации: если $\psi\colon [c;d] \to [a;b]$ — взаимно однозначная функция класса C^1, то

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_c^d \sqrt{((x \circ \psi)'(u))^2 + ((y \circ \psi)'(u))^2}\, du$$

(это сразу следует из формулы замены переменной, не рассматривавшейся в нашем курсе).

Итак, если отождествить число $x + iy \in \mathbb{C}$ с точкой $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, то наше отображение запишется в виде $t \mapsto (\cos t; \sin t)$. Вектор скорости точки в момент t равен $((\cos t)'; (\sin t)') = (-\sin t; \cos t)$; его длина равна $\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$, так что за время t точка проходит путь t. В частности, за время 2π точка пройдет путь 2π; ввиду предложения 9.23 это означает, что длина окружности радиуса 1 равна 2π, так что число π, определенное нами в предложении 9.20, является «настоящим».

Отметим наконец, что, подобно экспоненте, синус и косинус можно определить для произвольных комплексных чисел. В самом деле, из формул $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, верных для любого $x \in \mathbb{R}$, вытекают формулы

$$\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2, \tag{9.11}$$

$$\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i. \tag{9.12}$$

Правые части этих формул имеют смысл при любом $x \in \mathbb{C}$, и при любом $x \in \mathbb{C}$ их принимают за определение синуса и косинуса комплексных чисел. Из предложения 8.10 и абсолютной сходимости на любом круге ряда для экспоненты немедленно вытекает, что для синуса и косинуса комплексных чисел также верны разложения (9.8) и (9.9).