Независимый Московский университет

Математический анализ, 1 курс 5 декабря 1999 г.

В скобках после номера задачи указано количество очков за полное решение этой задачи. Критерии оценок будут выработаны после проверки, но заранее известно, что оценка "удовлетворительно" будет стоить ≤ 30 очков, а оценка "отлично" — ≤ 60 очков.

1) **(5)** Вычислите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\pi + 2^\pi + \ldots + n^\pi}{n^{1+\pi}}.$$

2) **(5)** Найдите такую дробно-линейную функцию $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$, что $f(x) - e^x = o(x^2)$ при $x \to 0$.

3) **(10)** Пусть $X \subset C[0,1]$ — множество непрерывных отображений отрезка $[0,1]$ в себя. Непрерывно ли в топологии, заданной sup-нормой, отображение $c\colon X \to X$, задаваемое правилом $c\colon f(x) \mapsto f(f(x))$?

4) **(10)** Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция на интервале $(0,1)$, $x_0 \in (0,1)$, $f''(x_0) \neq 0$. Докажите, что найдутся такие a, b $(0 < a < b < 1)$, что

$$f'(x_0) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

5) **(15)** Пусть x_n и y_n — две бесконечно малые (стремящиеся к нулю) последовательности, причем $y_n \neq 0$ при всех n. Предположим, что существует (конечный) предел $A = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$. Докажите, что тогда существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ и найдите его.

6) **(15)** Пусть $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ — степенной ряд, радиус сходимости которого больше единицы, и пусть $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(e^{2\pi i k/n})}{n} = f(0).$$

7) **(20)** Докажите, что

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_M^t \sin x/x \, dx = O(1/M)$$

при $M \to +\infty$ (нужно доказать и существование (конечного) предела, и оценку).

8) **(20)** Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на $[0,a]$, $f(0) = f(a) = 0$. Докажите, что при $a = \pi$ справедливо утверждение: «существует такая точка $\xi \in (0,a)$, что $f''(\xi) + f(\xi) = 0$». Верно ли это утверждение для $a = 3$?