Независимый Московский университет

Математический анализ, 1 курс — 20 февраля 2000 г.

В скобках после номера задачи указано количество очков за полное решение этой задачи. Критерии оценок будут выработаны после проверки, но заранее известно, что оценка "удовлетворительно" будет стоить ≤ 30 очков, а оценка "отлично" — ≤ 60 очков.

1) **(10)** Сходится ли равномерно на $[0,1]$ последовательность функций $(1+x^n)^{1/n}$?

2) **(10)** Сходится ли ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n^2}-1}{e^{1/n}-1}$?

3) **(10)** Функции f и g определены на $(0;\infty)$ и положительны. Для любого $a>1$ при $x\to\infty$ выполнено $f(ax)=O(g(x))$. Верно ли, что $f(x)=O(g(x))$?

4) **(20)** Пусть X — множество непрерывных вещественнозначных функций на отрезке $[0;1]$; введем на X метрику по формуле

$$\rho(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx.$$

Будет ли пространство (X,ρ) полным?

5) **(20)** На последовательности различных чисел x_n, сходящейся к x_0, значения функций $f,g\in C^\infty(\mathbb{R})$ совпадают. Верно ли, что ряды Тейлора f и g в точке x_0 одинаковы?

6) Функция называется выпуклой (на интервале (a,b)), если для любых $x,y\in[a,b]$ и любого $0\leq\lambda\leq 1$ выполнено неравенство $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

   а) **(10)** Докажите, что выпуклая функция непрерывна на (a,b).

   б) **(20)** Докажите, что выпуклая функция дифференцируема во всех точках (a,b) за исключением, быть может, счетного множества точек.

7) **(20)** Последовательность x_n задана соотношениями: $x_1=1/2$, $x_{n+1}=x_n-x_n^3$ при $n\geq 1$. Доказать, что $\lim_{n\to\infty}x_n=0$, и найти главный член асимптотики x_n при $n\to\infty$.