Выпуклые тела и выпуклые многогранники

Лекция 1

1 Изопериметрическое неравенство

Среди всех плоских фигур одинакового периметра наибольший объем имеет круг (и только круг). Это классическая *изопериметрическая теорема* на плоскости. Под *фигурой* мы понимаем связное квадрируемое множество со спрямляемой границей. Длина границы называется *периметром*. Если не предполагать связности, то утверждение о единственности перестает быть верным.

Обозначим через $l(A)$ периметр фигуры A, а через $S(A)$ ее площадь. Изопериметрическую теорему можно переписать в виде *изопериметрического неравенства*:

$$S(A) \leqslant \frac{l^2(A)}{4\pi}.$$

Число $l^2/4\pi$ равно площади круга длины l. Из приведенного неравенства также следует, что среди всех фигур фиксированной площади наименьший периметр имеет круг.

Якоб Штейнер привел красивые эвристические рассуждения, подтверждающие изопериметрическую теорему. Рассуждения Штейнера таковы. Допустим, что существует единственная фигура с данным периметром, имеющая максимальную площадь. Тогда эта фигура (будем называть ее *оптимальной*) должна обладать следующими свойствами:

- *Выпуклость.* Оптимальная фигура выпукла, поскольку при переходе к выпуклой оболочке площадь не уменьшается, а периметр не увеличивается.

- *Симметричность.* Рассмотрим прямую произвольного направления, делящую пополам периметр фигуры. Эта прямая разбивает фигуру на две части. Рассмотрим часть с максимальной площадью, и симметрично отразим ее относительно прямой. Получим симметричную фигуру с тем же периметром и с не меньшей площадью. Следовательно, оптимальная фигура симметрична относительно некоторой прямой (на самом деле, относительно прямой произвольного направления).

- *Оптимальная фигура является кругом.* Действительно, зафиксируем ось симметрии и рассмотрим произвольную точку B на границе фигуры. Соединим эту точку с точками пересечения A и C границы фигуры и оси симметрии. Получим треугольник ABC (см. рис. 1). Допустим, что в вершинах этого треугольника установлены подвижные сцепления таким образом, что точки A и C могут скользить по оси симметрии, а угол B может меняться свободно. Допустим также, что части фигуры, лежащие над отрезками AB и BC, жестко скреплены с этими отрезками и двигаются вместе с ними. В частности, площадь этих частей не меняется. Периметр фигуры тоже не меняется в результате движения. Зато можно изменить площадь фигуры, изменив площадь треугольника ABC. Максимальное значение площади достигается в случае, если угол B прямой. Следовательно, точка B должна лежать на окружности с центром в середине отрезка AC. В силу произвольности точки B отсюда заключаем, что граница оптимальной фигуры является окружностью, а значит, сама оптимальная фигура является кругом.

Задача. Докажите, что среди всех четырехугольников с одинаковыми длинами сторон максимальную площадь имеет вписанный.

Задача Дидоны. Дидона — дочь тирского царя, легендарная основательница и первая царица Карфагена. Она была вынуждена бежать на Кипр вместе с сокровищами своего мужа Аркебаса, убитого братом Дидоны. Дидона высадилась в Африке. Там она купила у местного царя участок земли на берегу моря, *который можно покрыть шкурой быка.* Царь был учень доволен выгодной

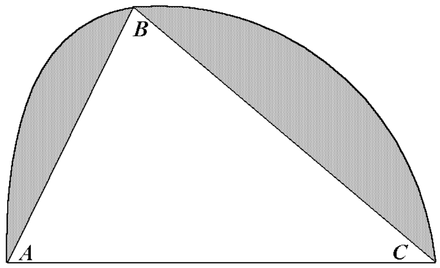

Рис. 1: Оптимальная фигура является кругом

сделкой, в то время как Дидона разрезала шкуру на тонкие куски и связала из этих кусков длинную веревку. Длины веревки оказалось достаточно для того чтобы огородить на берегу моря большой участок земли в форме полукруга. На этом участке и возник Карфаген.

Перед Дидоной стояла задача типа изопериметрической. Математически эта задача ставится следующим образом. Пусть на плоскости дана некоторая прямая l. Требуется построить криволинейную дугу фиксированной длины, начинающуюся и кончающуюся на l, так чтобы эта дуга вместе с прямой l охватывала максимальную площадь. Решением задачи Дидоны является дуга окружности с центром на прямой l. Для обоснования решения достаточно воспользоваться приведенными выше рассуждениями Штейнера. Только сначала нужно доказать, что решение существует.

Нетрудно сформулировать изопериметрическое неравенство для пространства $\mathbb{R}^d$ произвольной размерности d. Мы с самого начала ограничимся рассмотрением *выпуклых тел*, то есть компактных выпуклых множеств. Для выпуклых тел определены естественным образом понятия *объема* и *площади поверхности*. Объем тела A обозначим через $\operatorname{Vol} A$, а площадь поверхности (т.е. $(d-1)$-мерный объем границы) через $\operatorname{Vol}(\partial A)$. Сформулируем *классическое изопериметрическое неравенство*:

Теорема 1.1 *Пусть $C(d)$ — объем шара, площадь поверхности которого равна 1. Тогда для всякого выпуклого тела A с непустой внутренностью*

$$\operatorname{Vol} A \leqslant C(d) \operatorname{Vol}(\partial A)^{\frac{d}{d-1}},$$

причем равенство реализуется только для шара.

Таким образом, из всех выпуклых тел с данной площадью поверхности наибольший объем имеет шар.

Изопериметрическое неравенство верно и для невыпуклых тел, лишь бы можно было говорить об их объеме и площади поверхности. Однако утверждение о единственности в этом более широком классе перестает выполняться. Пример доставляет "волосатая сфера" (сфера с одномерными отростками).

2 Симметризация по Штейнеру

Одно из доказательств изопериметрического неравенства основано на конструкции *симметризации по Штейнеру*. Эта конструкция замечательна и сама по себе.

Определение. Пусть H — некоторая аффинная гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$. Всякому выпуклому телу A сопоставим множество $\mathrm{st}_H(A)$, симметричное относительно гиперплоскости H. Множество $\mathrm{st}_H(A)$ получается следующим образом. Разобьем тело A на отрезки, перпендикулярные гиперплоскости H. Каждый отрезок перенесем вдоль содержащей его прямой таким образом, чтобы середина отрезка попала на гиперплоскость H. Полученное множество $\mathrm{st}_H(A)$, очевидно, будет симметричным относительно гиперплоскости H. Описанный процесс (а также множество $\mathrm{st}_H(A)$) называется *симметризацией по Штейнеру* тела A.

Предложение 2.1 *При симметризации по Штейнеру выпуклых тел получаются выпуклые тела.*

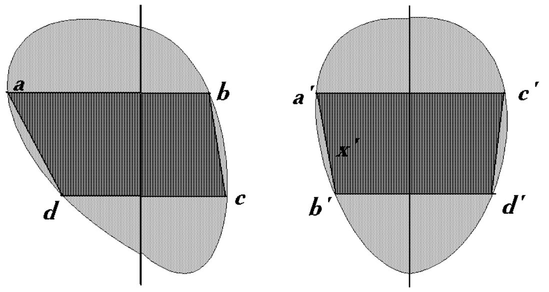

Рис. 2: Выпуклость симметризации по Штейнеру

Доказательство.
Пусть A — выпуклое тело, а H — гиперплоскость. Докажем выпуклость множества $\mathrm{st}_H(A)$. Предположим противное: точка x' принадлежит некоторому отрезку $[a', b']$ с концами в $\mathrm{st}_H(A)$, однако $x' \notin \mathrm{st}_H(A)$. Уменьшив при необходимости отрезок $[a', b']$, мы можем считать, что его концы лежат на границе множества $\mathrm{st}_H(A)$.

Базисной трапецией компактного множества (относительно гиперплоскости H) назовем трапецию, основания которой перпендикулярны гиперплоскости H, а все вершины лежат на границе множества. Достроим отрезок $[a', b']$ до базисной трапеции $a'b'c'd'$. Пусть a, b, c, d — прообразы точек a', b', c' и d' соответственно при преобразовании st_H. Получим базисную трапецию $abcd$ выпуклого тела A.

Теперь осталось заметить две вещи. Во-первых, для произвольного выпуклого подмножества $B \subseteq A$ имеет место включение $\mathrm{st}_H(B) \subseteq \mathrm{st}_H(A)$. Во-вторых, $\mathrm{st}_H(abcd) = a'b'c'd'$. Следовательно, $a'b'c'd' \subseteq \mathrm{st}_H(A)$. В частности, $x' \in \mathrm{st}_H(A)$. Противоречие. Таким образом, множество $\mathrm{st}_H(A)$ выпукло. Кроме того, это множество, очевидно, компактно, а следовательно, является выпуклым телом. $\square$

Несмотря на простоту доказанного предложения, дадим еще одно его доказательство. Введем в $\mathbb{R}^d$ такую систему координат, что H будет координатной гиперплоскостью. Тело A можно представить как область между графиками двух частично определенных функций $f_1, f_2 : H \to \mathbb{R}$, причем $f_1 \leqslant f_2$, функция f_1 выпукла вниз, а функция f_2 выпукла вверх. Функции f_1 и f_2 имеют одну и ту же область определения D, совпадающую с проекцией тела A на гиперплоскость H. Область D выпукла.

Подвергнув тело A симметризации Штейнера, мы получим область, заключенную между графиками функций $(f_1 - f_2)/2$ и $(f_2 - f_1)/2$. Первая функция, очевидно, выпукла вверх, а вторая выпукла вниз. Теперь воспользуемся следующей очевидной леммой:

Лемма 2.2 *Пусть функции g_1 и g_2 определены на одном и том же выпуклом множестве, причем $g_1 \leqslant g_2$, функция g_1 выпукла вниз, а функция g_2 выпукла вверх. Тогда область между графиками функций g_1 и g_2 выпукла.*

Для доказательства предложения 2.1 положим в этой лемме $g_1 = (f_1 - f_2)/2$, $g_2 = (f_2 - f_1)/2$.

Предложение 2.3 *Симметризация по Штейнеру сохраняет объемы.*

Доказательство.
Используя ранее введенные обозначения, имеем:

$$\mathrm{Vol}\, A = \int_D (f_1(x) - f_2(x))dx.$$

Это вытекает из теоремы Фубини. Подынтегральные выражения в формулах для $\mathrm{Vol}\, A$ и $\mathrm{Vol}\,\mathrm{st}_H(A)$ совпадают. Следовательно, тела A и $\mathrm{st}_H(A)$ имеют одинаковые объемы. $\square$

3 Сложение по Минковскому

Нам понадобится еще одна операция над выпуклыми телами — сложение по Минковскому. Пусть A и B — произвольные подмножества $\mathbb{R}^d$.

Определение. *Суммой по Минковскому* множеств A и B называется множество

$$A + B = \{a + b|\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Дадим еще одно, очевидно, эквивалентное, определение суммы по Минковскому:

$$A + B = \bigcup_{a \in A} a + B,$$

где $a + B$ обозначает параллельный перенос множества B на вектор a. Таким образом, чтобы получить сумму $A + B$, нужно перенести параллельно множество B в каждую точку множества A и рассмотреть объединение всех полученных экземпляров множества B.

Наряду со сложением по Минковскому определено *умножение множества на неотрицательное число*:

$$\alpha A = \{\alpha a|\ a \in A\}.$$

Умножению на отрицательные числа мы будем придавать совершенно другой смысл.

Пример. Пусть B — это шар единичного радиуса. Тогда множество $A_\varepsilon = A + \varepsilon B$ есть не что иное, как *ε-окрестность множества* A, то есть геометрическое место точек, удаленных от множества A на расстояние $\leqslant \varepsilon$.

Предложение 3.1 *Сумма двух выпуклых тел снова является выпуклым телом.*

Доказательство.
Сумма двух выпуклых множеств — снова выпуклое множество. Сумма двух ограниченных множеств — снова ограниченное множество. Сумма двух замкнутых ограниченных множеств — снова замкнутое множество. Все эти утверждения вытекают непосредственно из определения сложения по Минковскому. Отсюда следует, что сумма двух выпуклых тел (то есть выпуклых замкнутых ограниченных множеств) — снова выпуклое тело. □

Заметим, что сумма двух замкнутых множеств может не быть замкнутым множеством. Например, пусть A — это график функции $y = e^x$, а B — ось x. Тогда множество $A + B$ — это верхняя полуплоскость. Оба множества A и B замкнуты, а их сумма нет.

Предложение 3.2 *Пусть A и B — выпуклые тела, а H — некоторая гиперплоскость. Если начало координат принадлежит H, а α и β — произвольные действительные числа, то*

$$\mathrm{st}_H(\alpha A) = \alpha \cdot \mathrm{st}_H(A),$$

$$\mathrm{st}_H(\alpha A + \beta B) \supseteq \alpha \cdot \mathrm{st}_H(A) + \beta \cdot \mathrm{st}_H(B).$$

Доказательство.
В доказательстве нуждается только второе утверждение. Положим $C = \alpha A + \beta B$. Пусть $c' = \alpha a' + \beta b'$, где $a' \in \mathrm{st}_H(A)$, $b' \in \mathrm{st}_H(B)$. Мы хотим доказать, что $c' \in \mathrm{st}_H(C)$. Пусть a, b и c — прообразы точек a', b' и c' при симметризации по Штейнеру выпуклых тел A, B и C соответственно. Обозначим через l_a прямую, перпендикулярную гиперплоскости H и проходящую через точку a. Прямые l_b и l_c определяются аналогично. Рассмотрим отрезки $S_a = A \cap l_a$, $S_b = B \cap l_b$ и $S_c = C \cap l_c$. Очевидно, $S_c = \alpha S_a + \beta S_b$. Достаточно доказать, что

$$\mathrm{st}_H(S_c) \supseteq \alpha \cdot \mathrm{st}_H(S_a) + \beta \cdot \mathrm{st}_H(S_b).$$

В данном случае имеет место равенство. Это видно из рис. 3. □

Предложение 3.3 *При симметризации по Штейнеру площадь поверхности не увеличивается.*

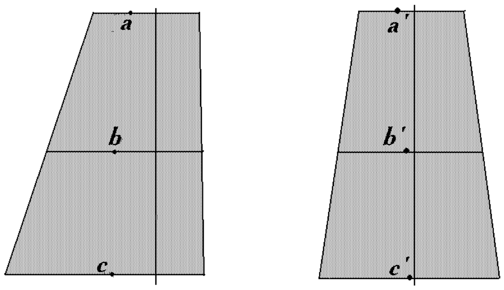

Рис. 3: Доказательство равенства $\mathrm{st}_H(S_c) = \alpha \cdot \mathrm{st}_H(S_a) + \beta \cdot \mathrm{st}_H(S_b)$

Доказательство.
Обозначим через B шар единичного радиуса. Заметим, что площадь поверхности выпуклого тела A можно посчитать по следующей формуле:

$$S(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{Vol}(A_\varepsilon) - \mathrm{Vol}(A)}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \mathrm{Vol}(A_\varepsilon).$$

Согласно предложению 3.2 имеем:

$$\mathrm{Vol}\,\mathrm{st}_H(A_\varepsilon) = \mathrm{Vol}\,\mathrm{st}_H(A + \varepsilon B) \leqslant \mathrm{Vol}(\mathrm{st}_H(A) + \varepsilon B).$$

Дифференцируя обе части этого неравенства при $\varepsilon = 0$, получаем $S(\mathrm{st}_H(A)) \leqslant S(A)$, что и требовалось доказать. □

4 Метрика Хаусдорфа

Доказывать изопериметрическую теорему в произвольной размерности можно следующим образом. Пусть A — произвольное выпкулое тело с непустой внутренностью. Подвергнем тело A симметризации по Штейнеру относительно некоторой гиперплоскости H, содержащей начало координат. При этом объем тела A не изменится, а площадь поверхности не увеличится. Продолжим процесс симметризации. На каждом шаге будем симметризавать по Штейнеру относительно некоторой гиперплоскости, содержащей начало координат. В результате получим последовательность выпулых тел $A_1 = A, A_2, \ldots$, соответствующую последовательности гиперплоскостей $H_1 = H, H_2, \cdots$. Если правильно выбирать плоскости симметризации H_n, то можно "досимметризовать" тело A до шара, то есть получить последовательность A_n, в пределе дающую шар. Этот шар будет иметь тот же объем, что и тело A, а площадь поверхности шара будет не больше, чем у A. Следовательно, среди всех выпуклых тел данного объема наименьшую площадь поверхности имеет шар. Это утверждение эквивалентно изопериметрической теореме.

Попытаемся формализовать приведенные рассуждения. Прежде всего, чтобы говорить о пределе последовательности выпуклых тел, нужно ввести во множестве всех выпуклых тел топологию.

Определение. Пусть A и B — непустые замкнутые подмножества пространства $\mathbb{R}^d$. Положим

$$\bar{\rho}(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 |\ A_\varepsilon \supseteq B\}.$$

Расстоянием по Хаусдорфу между телами A и B называется число

$$\rho(A, B) = \max\{\bar{\rho}(A, B), \bar{\rho}(B, A)\}.$$

Предложение 4.1 *Расстояние по Хаусдорфу определяет метрику на множестве всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$.*

Доказательство.
Симметричность очевидна. Если $\rho(A, B) = 0$, то $A_\varepsilon \supseteq B$ для всякого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $B \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = A$. Аналогично, $A \subseteq B$. Значит, $A = B$.

Осталось доказать транзитивность. Пусть A, B и C — выпуклые множества. Пусть $\varepsilon = \bar\rho(A,B) \leqslant \rho(A,B)$, $\delta = \bar\rho(B,C) \leqslant \rho(B,C)$. Тогда $A_\varepsilon \supseteq B$, $B_\delta \supseteq C$. Следовательно, $A_{\varepsilon+\delta} \supseteq C$. Аналогично, $C_{\varepsilon+\delta} \supseteq A$, откуда

$$\rho(A,C) \leqslant \varepsilon + \delta \leqslant \rho(A,B) + \rho(B,C).$$

□

Один из самых важных моментов в доказательстве изопериметрической теоремы — доказательство существования выпуклого тела, имеющего при заданной площади поверхности максимальный объем (или при заданном объеме минимальную площадь поверхности). Это доказательство (как и большинство доказательств существования) опирается на то, что непрерывная функция на компакте достигает наибольшего значения.

Наша функция — это объем (или площадь поверхности). Функция объема непрерывна на пространстве всех выпуклых тел, наделенном метрикой Хаусдорфа. Это вытекает непосредственно из определения расстояния по Хаусдорфу.

Функция площади поверхности не является непрерывной. Например, гипотенузу прямоугольного треугольника можно сколь угодно точно приблизить ломаной, звенья которой параллельны катетам. Длина такой ломаной будет равна сумме длин катетов. Рассмотрим фигуру, образованную двумя катетами и ломаной, приближающей гипотенузу. Периметр нашей фигуры не будет приближать периметр исходного прямоугольного треугольника.

Однако функцию площади поверхности можно сделать непрерывной, если ограничиться рассмотрением только выпуклых тел.

Теперь по поводу компактности. Множество всех замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^d$ некомпактно в метрике Хаусдорфа. Дело в том, что последовательности замкнутых множеств могут уходить на бесконечность. Если им это запретить, получим компактное множество.

Предложение 4.2 *Множество всех непустых замкнутых подмножеств единичного куба компактно в метрике Хаусдорфа.*

Доказательство.
Воспользуемся следующим критерием компактности: метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно полно и вполне ограниченно (то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечная ε-сеть).

Докажем полноту. Обозначим через C единичный куб. Пусть A_n — последовательность замкнутых подмножеств куба, фундаментальная в метрике Хаусдорфа. Положим

$$B_n = \overline{\bigcup_{m\geqslant n} A_n}.$$

Мы получили, как нетрудно видеть, убывающую последовательность компактных подмножеств куба. Следовательно, пересечение $A = \bigcap B_n$ непусто и замкнуто, то есть лежит в рассматриваемом пространстве. Докажем, что $A = \lim A_n$.

По определению, имеем:

$$\bar\rho(A_n, A) \leqslant \bar\rho(A_n, B_n) = \rho(A_n, B_n) = \sup_{m>n} \rho(A_n, A_m) \to 0 \quad (n\to\infty) \qquad (\textit{фундаментальность}),$$

кроме того

$$\bar\rho(A, A_n) \leqslant \bar\rho(A, B_n) = \rho(A, B_n) \to 0 \quad (n\to\infty),$$

а значит, $\rho(A_n, A) \to 0$. Таким образом, $A_n \to A$, что и требовалось доказать.

Предельный переход $\rho(A, B_n) \to 0$ нуждается в обосновании. Последовательность $\rho(A, B_n)$ невозрастает. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и для всех n выполнено неравенство $\rho(A, B_n) > \varepsilon$. Это означает, что всякое множество $D_n = \overline{C - A_\varepsilon} \cap B_n$ непусто. Множества D_n компактны и образуют убывающую последовательность. Следовательно, пересечение $\bigcap D_n$ непусто. Но

$$\bigcap D_n = \overline{C - A_\varepsilon} \cap A = \varnothing.$$

Мы пришли к противоречию, которое доказывает, что $\rho(A, B_n) \to 0$.

Докажем теперь вполне ограниченность. Разобьем куб C на n^d равных кубиков со стороной $1/n$. Нетрудно проверить, что всевозможные объединения кубиков составляют ε-сеть при $\varepsilon > \sqrt{d}/n$. Таким образом для каждого $\varepsilon > 0$ можно построить конечную ε-сеть. □

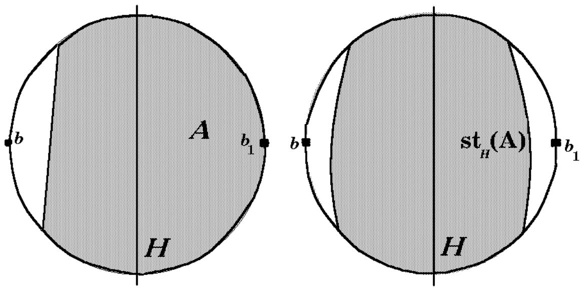

Рис. 4: Доказательство леммы 5.2

5 Теорема Бляшке о шаре

Для полного доказательства изопериметрического неравенства осталось только проверить, что последовательными симметризациями произвольного выпуклого тела с непустой внутренностью можно получить шар. Это так называемая *теорема Бляшке о шаре*. Сформулируем ее более аккуратно:

Теорема 5.1 *Пусть $\mathcal{X}$ — множество выпуклых тел, лежащих в некотором кубе, замкнутое в метрике Минковского и устойчивое относительно симметризации по Штейнеру с центром в некоторой точке a. Последнее означает, что для всякого множества $A \in \mathcal{X}$ и для всякой гиперплоскости H, содержащей точку a, $\mathrm{st}_H(A) \in \mathcal{X}$. Тогда множество $\mathcal{X}$ содержит либо $\{a\}$, либо некоторый шар с центром в точке a.*

Точку a можно рассматривать как шар с нулевым радиусом.

При доказательстве теоремы Бляшке ключевую роль играет следующая лемма:

Лемма 5.2 *Пусть A — выпуклое тело, лежащее в шаре B, однако не совпадающее с B. Тогда после нескольких симметризаций по Штейнеру относительно гиперплоскостей, содержащих центр шара B, из тела A можно получить тело, не пересекающее границу шара B.*

Доказательство.

Обозначим через S граничную сферу шара B. Поскольку A не совпадает с B, сфера S не содержится в A. Рассмотрим произвольную точку $b \in S - A$. Поскольку множество $S - A$ открыто, оно содержит вместе с точкой b некоторый шар U с центром в точке b. Обозначим через ε радиус шара U.

На сфере S найдется конечная ε-сеть $b_1, \ldots, b_n$. Обозначим через U_i шар радиуса ε с центром в точке b_i. Тогда шары U_i покрывают всю сферу S, то есть $S \subseteq \bigcup U_i$.

Обозначим через H_i гиперплоскость, содержащую центр шара B и перпендикулярную отрезку bb_i. Положим $A_0 = A$, $A_i = \mathrm{st}_{H_i}(A_{i-1})$ при $i > 0$. Как нетрудно видеть, множество A_1 не пересекается с $S \cap U_1$ (см. рис. 4). Аналогично, множество A_i, не пересекается с $S \cap (U_1 \cup \cdots \cup U_i)$. Следовательно, A_n не пересекается с S. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 5.1.

Докажем, что существует наименьший шар с центром в точке a, содержащий некоторое тело из $\mathcal{X}$. Действительно, обозначим через B пересечение всех шаров с центром в точке a, содержащих некоторые тела из $\mathcal{X}$. Множество B тоже является шаром с центром в точке a. Найдется последовательность шаров B_n, такая что $B = \bigcap B_n$, и шар B_n содержит некоторое выпуклое тело $A_n \in \mathcal{X}$. В силу компактности $\mathcal{X}$ (см. 4.2), последовательность A_n имеет предельную точку $A \in \mathcal{X}$. Нетрудно проверить, что A лежит в шаре B. Таким образом, B — наименьший шар с центром в точке a, содержащий некоторое тело из $\mathcal{X}$.

Если тело A содержит граничную сферу шара B, то тогда, в силу выпуклости, $A = B$. В противном случае, согласно лемме 5.2, множество $\mathcal{X}$ содержит некоторое тело, не пересекающее границу шара B, а следовательно, лежащее в некотором меньшем шаре. Противоречие с минимальностью B. $\square$

Теперь, когда мы доказали теорему Бляшке о шаре, мы можем, наконец, завершить доказательство изопериметрической теоремы.

Доказательство изопериметрической теоремы.
Рассмотрим произвольное выпуклое тело A. Пусть B — шар того же объема. Нам достаточно доказать, что $\mathrm{Vol}(\partial B) \leqslant \mathrm{Vol}(\partial A)$. Действительно, рассмотрим множество $\mathcal{X}$, состоящее из всех выпуклых тел C, таких что $\mathrm{Vol}(C) = \mathrm{Vol}(A)$, $\mathrm{Vol}(\partial C) \leqslant \mathrm{Vol}(\partial A)$. Множество $\mathcal{X}$, очевидно, замкнуто в смысле метрики Хаусдорфа и устойчиво относительно симметризации по Штейнеру. Таким образом, это множество удовлетворяет всем условиям теоремы Бляшке о шаре. Следовательно, $B \in \mathcal{X}$, то есть $\mathrm{Vol}(\partial B) \leqslant \mathrm{Vol}(\partial A)$, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим некоторое аффинное подпространство L в $\mathbb{R}^d$.

Определение. Тело A называется *симметричным* относительно подпространства L, если оно инвариантно относительно всех изометрий, оставляющих на месте все точки из L.

Например, тело, симметричное относительно точки — шар с центром в этой точке (не путать с центрально симметричным телом!).

Следующая теорема является обобщением теоремы Бляшке о шаре:

Теорема 5.3 *Пусть $\mathcal{X}$ — множество выпуклых тел, лежащих в некотором кубе, замкнутое в смысле метрики Хаусдорфа. Предположим, что для каждой гиперплоскости H, содержащей аффинное подпространство L, и для каждого тела $A \in \mathcal{X}$, $\mathrm{st}_H(A) \in \mathcal{X}$. Тогда множество $\mathcal{X}$ содержит некоторое выпуклое тело, симметричное относительно подпространства L.*

Доказательство.
Рассмотрим наименьшее симметричное относительно L компактное множество B, содержащее некоторое тело из $A \in \mathcal{X}$. Существование такого множества B вытекает из компактности $\mathcal{X}$ (см. 4.2). Если $A = B$, то все доказано. Предположим, что это не так.

Рассмотрим некоторое ортогональное дополнение M к подпространству L, такое что $M \cap B \neq \varnothing$. Тогда $M \cap B$ — это некоторый шар с центром в $M \cap L$. Согласно лемме 5.2, множество $\mathcal{X}$ содержит некоторое выпуклое тело A', не пересекающее граничную сферу шара $B \cap M$. Обозначим через B' множество, полученное вращением тела A' вокруг L. Более точно, если G — группа изометрий $\mathbb{R}^n$, оставляющих L на месте, то положим $B' = \bigcup_{g \in G} gA'$. Тогда B' является компактным множеством, симметричным относительно L и содержащим тело $A' \in \mathcal{X}$. При этом, очевидно $B' \subset B$. Противоречие с минимальностью B. □