Выпуклые тела и выпуклые многогранники

Лекция 2

1 Неравенство Брунна–Минковского

Предположим, что в пространстве $\mathbb{R}^d$ зафиксирована форма объема. Имеет место следующее соотношение между объемами выпуклых тел A, B и $A+B$:

$$\sqrt[d]{\operatorname{Vol}(A+B)} \geq \sqrt[d]{\operatorname{Vol} A} + \sqrt[d]{\operatorname{Vol} B}.$$

Это *неравенство Брунна–Минковского*.

Неравенство Брунна–Минковского является обобщением изопериметрического неравенства. Если через B обозначить шар единичного радиуса с центром в начале координат, то $A+\varepsilon B$ — это ε-крестность тела A. Объем поверхности тела A вычисляется по формуле

$$\operatorname{Vol}(\partial A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\operatorname{Vol}(A+\varepsilon B) - \operatorname{Vol}(A)}{\varepsilon}.$$

Из неравенства Брунна–Минковского вытекает, что

$$\operatorname{Vol}(A+\varepsilon B) \geqslant \operatorname{Vol}(A) + \varepsilon \cdot d \cdot \operatorname{Vol}(A)^{\frac{d-1}{d}} \operatorname{Vol}(B)^{\frac{1}{d}}.$$

Следовательно, $\operatorname{Vol}(\partial A) \geqslant d \cdot \operatorname{Vol}(B)^{\frac{1}{d}} \operatorname{Vol}(A)^{\frac{d-1}{d}}$. Но это классическое изопериметрическое неравенство, поскольку для шара B имеем $\operatorname{Vol}(\partial B) = d \cdot \operatorname{Vol}(B)$.

Минковский предложил рассматривать геометрию, в которой роль шара играет произвольное центрально симметричное выпуклое тело с центром в начале координат. В геометрии Минковского имеет смысл говорить об объеме, площади поверхности и расстояниях. В качестве примера определим расстояние в геометрии Минковского.

Определение. Пусть B — выпуклое тело размерности d в $\mathbb{R}^d$, содержащее начало координат в своей внутренности. *Функционал Минковского*, связынный с выпуклым телом B, определяется следующим образом: для каждой точки $x \in \mathbb{R}^d$ положим

$$p_B(x) = \inf\{\lambda \geqslant 0 |\ x \in \lambda B\}.$$

Функционал p_B является выпуклым и положительно однородным первой степени. Это означает, что

$$p_B(x+y) \leqslant p_B(x) + p_B(y),$$
$$p_B(\lambda x) = \lambda p_B(x), \quad \lambda \geqslant 0.$$

Обратно, всякий выпуклый положительно однородный функционал p имеет вид p_B для выпуклого тела $B = \{x \in \mathbb{R}^d |\ p(x) \leqslant 1\}$.

Если тело B симметрично относительно начала координат, то $p_B(x) = p_B(-x)$, то есть функционал p_B является нормой на пространстве $\mathbb{R}^d$. В этом случае расстояние между точками x и y можно определить как

$$\rho(x,y) = p_B(x-y).$$

Расстояние в смысле Минковского удовлетворяет неравенству треугольника.

В геометрии Минковского определены объемы (за единицу объема принимается тело B) и площади поверхности. Площадь поверхности выпуклого тела A в смысле Минковского определяется как

$$\operatorname{Vol}(\partial A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\operatorname{Vol}(A+\varepsilon B) - \operatorname{Vol}(A)}{\varepsilon}.$$

На самом деле, геометрия Минковского в пространстве $\mathbb{R}^d$ дает d числовых характеристик выпуклого тела, среди которых объем и площадь поверхности. Эти характеристики мы изучим позже.

Можно сказать, что неравенство Брунна–Минковского есть не что иное как изопериметрическое неравенство в геометрии Минковского.

Приступим теперь к доказательству неравенства Брунна–Минковского. Для доказательства этого неравенства нам потребуется следующая лемма:

Лемма 1.1 *Пусть C — некоторое выпуклое тело в $\mathbb{R}^{d+1}$, а φ — некоторый аффинный функционал на $\mathbb{R}^{d+1}$. Для каждого числа c определим число $f(c)$ как объем сечения тела C гиперплоскостью $\varphi = c$. Тогда функция $f^{\frac{1}{d}}$ выпукла вверх (вогнута), то есть*

$$\sqrt[d]{f(\lambda x + (1-\lambda)y)} \geqslant \lambda \sqrt[d]{f(x)} + (1-\lambda)\sqrt[d]{f(y)}, \quad \lambda \in [0,1].$$

Доказательство.
Найдется такая прямая l и такая система координат на этой прямой, что для точки $p \in l$ с координатой c гиперплоскость $\varphi = c$ перпендикулярна прямой l и проходит через точку p.

Заметим, что если подвергнуть тело C симметризации по Штейнеру относительно произвольной гиперплоскости, содержащей прямую l, то функция f при этом не изменится (симметризация по Штейнеру сохраняет объемы всех поперечных сечений). Согласно обобщенной теореме Бляшке о шаре, при помощи штейнеровской симметризации и предельного перехода можно из тела C получить новое тело C', симметричное относительно прямой l. Но для тела C' функция $\sqrt[d]{f(c)}$ пропорциональна радиусу шара $C' \cap \varphi^{-1}(c)$. Функция радиуса, очевидно, выпукла вверх. □

Доказательство неравенства Брунна–Минковского.
Пусть A и B — два выпуклых тела в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ выпуклую оболочку C множеств $A \times 0$ и $B \times 1$. Если рассмотреть в качестве аффинного функционала φ последнюю координату, то, согласно лемме 1.1, имеем

$$\sqrt[d]{\mathrm{Vol}(C \cap \varphi^{-1}(1/2))} \geqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt[d]{\mathrm{Vol}(A)} + \sqrt[d]{\mathrm{Vol}(B)}\right).$$

Однако, как нетрудно проверить, $C \cap \varphi^{-1}(1/2) = (A+B)/2$. Отсюда вытекает неравенство Брунна–Минковского. □

Рассмотрим теперь следующий пример. Пусть A — координатный параллелепипед со сторонами $a_1, \ldots, a_d$, а B — координатный параллелепипед со сторонами $b_1, \ldots, b_d$. Тогда неравенство Брунна–Минковского, записанное для пары параллелепипедов A и B, выглядит следующим образом:

$$\sqrt[d]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_d+b_d)} \geqslant \sqrt[d]{a_1 a_2 \cdots a_d} + \sqrt[d]{b_1 b_2 \cdots b_d}.$$

2 Опорная функция и двойственность

Определение. Пусть A — произвольное выпуклое тело в пространстве $\mathbb{R}^d$. Определим функцию H_A на сопряженном пространстве $\mathbb{R}^{d*}$ следующим образом:

$$H_A(\xi) = \max_{a \in A}(\xi, a).$$

Если отождествить пространство $\mathbb{R}^d$ и его сопряженное $\mathbb{R}^{d*}$ при помощи некоторой евклидовой метрики, то значение опорной функции H_A на единичном векторе ξ будет равно расстоянию от начала координат до опорной гиперплоскости к телу A, перпендикулярной ξ. Это расстояние следует брать со знаком плюс, если начало координат лежит с той же стороны от опорной гиперплоскости, что и тело A. В противном случае это расстояние нужно брать со знаком минус. В частности, если начало координат лежит внутри тела A, то опорная функция H_A положительна.

Нетрудно проверить, что опорная функция удовлетворяет следующим соотношениям:

- Опорная функция выпукла и положительно однородна степени 1:

$$H_A(\xi+\eta) \leqslant H_A(\xi) + H_A(\eta), \quad H_A(\alpha\xi) = \alpha H_A(\xi) \text{ } \textit{при } \alpha \geqslant 0.$$

- Опорная функция выпуклого тела A линейно зависит от A:

$$H_{A+B} = H_A + H_B, \quad H_{\alpha A} = \alpha H_A \text{ при } \alpha \geqslant 0.$$

Следующая лемма является конечномерным вариантом теоремы Хана–Банаха:

Лемма 2.1 *Пусть A — выпуклое тело, а точка a не принадлежит A. Тогда найдется такая аффинная гиперплоскость, что точка a и тело A лежат в разных полупространствах относительно этой гиперплоскости.*

Доказательство.
Рассмотрим точку b тела A, ближайшую к точке a. Легко проверить, что гиперплоскость, перпендикулярная отрезку $[a, b]$ и проходящая через его середину, удовлетворяет условиям леммы. □

Теорема 2.2 *Выпуклое тело однозначно определяется своей опорной функцией. Другими словами, если $H_A = H_B$, то $A = B$.*

Доказательство.
Тело A можно восстановить по опорной функции H_A следующим образом:

$$A = \{a \in \mathbb{R}^d | \ (\forall \xi \in \mathbb{R}^{d*}) \ H_A(\xi) \geqslant (\xi, a)\}.$$

Включение $\subseteq$ очевидно. Предположим теперь, что нашлась точка a, удовлетворяющая условию $H_A(\xi) \geqslant (\xi, a)$ для всякого ковектора ξ и не принадлежащая A. Тогда, согласно лемме 2.1, точку a можно отделить от тела A некоторой гиперплоскостью. Пусть эта гиперплоскость задается уравнением $\xi = c$, где ξ — некоторый линейный функционал. Тогда $(\xi, a) > c$, а $(\xi, A) \leqslant c$, то есть $H_A(\xi) \leqslant c$. Противоречие с тем, что $H_A(\xi) \geqslant (\xi, a)$. Тем самым доказано включение $\supseteq$. □

Определение. Для каждого выпуклого тела A в пространстве $\mathbb{R}^d$ определим *двойственное выпуклое тело* A^* в пространстве $\mathbb{R}^d$ следующим образом:

$$A^* = \{\xi \in \mathbb{R}^{d*} | \ (\forall a \in A)(\xi, a) \leqslant 1\}.$$

Предложение 2.3 *Опорная функция тела A совпадает с функционалом Минковского тела A^*:*

$$H_A = p_{A^*}.$$

Доказательство.
Действительно, по определению функционала Минковского, имеем:

$$p_{A^*}(\xi) = \min\{\alpha \geqslant 0 | \ \xi \in \alpha A^*\} = \min\{\alpha \geqslant 0 | \ (\forall a \in A)(\xi, a) \leqslant \alpha\} = \max_{a \in A}(\xi, a) = H_A(\xi).$$

□

Предложение 2.4 *Для всякого выпуклого тела A имеет место равенство $A^{**} = A$.*

Это вытекает из определения двойственного тела и теоремы Хана–Банаха. В качестве следствия получаем, что функционал Минковского выпуклого тела совпадает с опорной функцией двойственного тела: $p_A = H_{A^*}$.

3 Гауссово отображение

Определение. Пусть A — выпуклое тело с непустой внутренностью и гладкой (C^1) границей. Определим *гауссово отображение* G_A, переводящее границу тела A в единичную сферу в сопряженном пространстве. Именно, каждой точке $a \in \partial A$ поставим в соответствие единичную внешнюю нормаль к опорной гиперплоскости в точке a. Условие гладкости границы нужно для того, чтобы в каждой точке границы ∂A существовала в точности одна опорная гиперплоскость.

Можно определить гауссово отображение и в общем случае (не требуя гладкости границы). Тогда оно будет, вообще говоря, многозначным. Однако, как известно, граница выпуклого тела почти всюду C^1-гладкая. Следовательно, гауссово отображение почти всюду однозначно определено.

Определение. Говорят, что выпуклое тело A *строго выпукло* в точке $a \in \partial A$, если гауссово отображение обратимо в точке $G_A(a)$, то есть $G_A^{-1}(G_A(a)) = \{a\}$. Очевидно, строгая выпуклость эквивалентна невырожденности дифференциала гауссова отображения.

Предложение 3.1 *Пусть A — выпуклое тело с непустой внутренностью и гладкой границей. Тогда гауссово отображение почти всюду обратимо, то есть множество точек на сфере $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^{d*}$, имеющих более одного прообраза, имеет меру нуль.*

Доказательство.
Обозначим через C множество всех точек из ∂A, в которых дифференциал гауссова отображения вырождается, то есть множество всех точек, в которых нарушается строгая выпуклость. Доказываемое утверждение состоит в том, что множество $G_A(C)$ имеет меру нуль. Но это частный случай леммы Сарда. □

Заметим, что само множество C вовсе не обязано иметь меру нуль. Например, в случае выпуклого многогранника, оно имеет полную меру.

Нетрудно обобщить предложение 3.1 на случай произвольного выпуклого тела. Таким образом, гауссово отображение почти всюду определено и почти всюду обратимо (только эти "почти всюду" относятся к разным пространством). Это одно из проявлений двойственности.

Теорема 3.2 *Дифференциал опорной функции, ограниченный на единичную сферу в сопряженном пространстве $\mathbb{R}^{d*}$, представляет собой отображение, обратное к гауссовому:*

$$dH|_{S^{d-1}} = G^{-1}.$$

Замечание 1. Дифференциал гауссова отображения определен на сопряженном пространстве, а принимает значения в линейных функционалах на сопряженном пространстве. Но при естественном отождествлении пространства и дважды сопряженного можно считать, что dH отображает $\mathbb{R}^{d*}$ в $\mathbb{R}^d$. Так что области определений и области значений у двух отображений, указанных в теореме 3.2, совпадают.

Замечание 2. Строго говоря, равенство $dH|_{S^{d-1}} = G^{-1}$ имеет место только там, где оба отображения определены. Однако гауссово отображение почти всюду обратимо, а опорная функция почти всюду дифференцируема. Так что оба отображения определены почти всюду.

Доказательство теоремы 3.2.
Пусть A — выпуклое тело. Положим $H = H_A$, $G = G_A$. Пусть ξ — произвольный линейный функционал на $\mathbb{R}^d$. Максимум величины (ξ, a), $a \in A$, достигается в точке $a = G^{-1}(\xi)$. Этот максимум по определению равен $H(\xi)$. Поэтому

$$H(\xi) = (\xi, G^{-1}(\xi)).$$

Продифференцируем обе части этого равенства:

$$dH(\xi) = (d\xi, G^{-1}(\xi)) + (\xi, dG^{-1}(\xi)).$$

Заметим, что в обеих частях полученного равенства стоят линейные функционалы от $d\xi$. При отождествлении пространства и дважды сопряженного линейный функционал $d\xi \mapsto (d\xi, G^{-1}(\xi))$ на $\mathbb{R}^{d*}$ отождествляется с точкой $G^{-1}(\xi) \in \mathbb{R}^d$. Далее, поскольку G^{-1} отображает единичную сферу $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^{d*}$ в границу тела A, дифференциал $dG^{-1}(\xi)$ принимает значения в опорной плоскости к точке $G^{-1}(\xi)$. Но эта опорная плоскость ортогональна ξ по определению гауссова отображения. Следовательно, $(\xi, dG^{-1}(\xi)) = 0$. Все доказано. □

Доказанная теорема дает эффективный способ представления выпуклого тела. Поверхность ∂A получается как образ единичной сферы при отображении dH_A. Заметим во-первых, что это отображение линейно зависит от A. Во-вторых, поскольку функция H_A положительно однородна первой степени, дифференциал dH_A — положительно однородное отображение нулевой степени. Другими словами, отображение dH_A постоянно на любом луче, выходящем из начала координат. Поэтому оно переводит не только сферу, но и все сопряженное пространство с выколотым началом координат, в поверхность тела A.

4 Случай равенства в неравенстве Брунна–Минковского

Напомним, что для всяких выпуклых тел A и B имеет место неравенство Брунна–Минковского:

$$\sqrt[d]{\mathrm{Vol}(A+B)} \geq \sqrt[d]{\mathrm{Vol}\, A} + \sqrt[d]{\mathrm{Vol}\, B}.$$

Опишем теперь основной случай равенства в неравенстве Брунна–Минковского.

Теорема 4.1 *Предположим, что выпуклые тела A и B имеют непустые внутренности и гладкие границы. Тогда в неравенстве Брунна–Минковского реализуется равенство только в том случае, когда тела A и B пропорциональны.*

Оставшаяся часть лекции посвящена доказательству этой теоремы.

Напомним, что для выпуклых тел A и B и гиперплоскости H, содержащей начало координат, имеет место включение

$$\mathrm{st}_H(A+B) \supseteq \mathrm{st}_H(A) + \mathrm{st}_H(B).$$

Докажем прежде всего, что если на телах A и B неравенство Брунна–Минковского обращается в равенство, то в приведенном выше включении тоже реализуется равенство.

Лемма 4.2 *Если в неравенстве Брунна–Минковского, записанном для выпуклых тел A и B с непустыми внутренностями, реализуется равенство, то тогда для произвольной гиперплоскости H имеем*

$$\mathrm{st}_H(A+B) = \mathrm{st}_H(A) + \mathrm{st}_H(B).$$

Доказательство.
Обозначим через A^*, B^* и C^* результаты симметризации по Штейнеру относительно гиперплоскости H выпуклых тел A, B и C соответственно.

Можно записать следующую цепочку неравенств:

$$(\mathrm{Vol}(A)^{\frac{1}{d}} + \mathrm{Vol}(B)^{\frac{1}{d}})^d = \mathrm{Vol}(C) = \mathrm{Vol}(C^*) \geqslant \mathrm{Vol}(A^*+B^*) \geqslant (\mathrm{Vol}(A^*)^{\frac{1}{d}} + \mathrm{Vol}(B^*)^{\frac{1}{d}})^d =$$

$$= (\mathrm{Vol}(A^*)^{\frac{1}{d}} + \mathrm{Vol}(B^*)^{\frac{1}{d}})^d.$$

В самом деле, согласно предложению 3.2 первой лекции, имеет место включение $C^* \supseteq A^* + B^*$. Следовательно, $\mathrm{Vol}(C^*) \leqslant \mathrm{Vol}(A^*+B^*)$. Поскольку симметризация по Штейнеру не меняет объемы, $\mathrm{Vol}(C^*) = \mathrm{Vol}(C)$. А так как в неравенстве Брунна–Минковского для выпуклых тел A и B реализуется равенство, $\mathrm{Vol}(C) = (\mathrm{Vol}(A)^{\frac{1}{d}} + \mathrm{Vol}(B)^{\frac{1}{d}})^d$. Далее, согласно неравенству Брунна–Минковского для выпуклых тел A^* и B^*, имеем: $\mathrm{Vol}(A^*+B^*) \geqslant (\mathrm{Vol}(A^*)^{\frac{1}{d}} + \mathrm{Vol}(B^*)^{\frac{1}{d}})^d$. Заметим, наконец, что $\mathrm{Vol}(A^*) = \mathrm{Vol}(A)$, $\mathrm{Vol}(B^*) = \mathrm{Vol}(B)$.

Первый и последний член выписанной цепочки неравенств совпадают. Значит, все неравенства обращаются в равенства. В частности, $\mathrm{Vol}(C^*) = \mathrm{Vol}(A^*+B^*)$, откуда следует, что $C^* = A^* + B^*$, что и требовалось доказать. □

Заметим, что из равенства $\mathrm{Vol}(C^*) = \mathrm{Vol}(A^*+B^*)$ следует равенство $C^* = A^* + B^*$ только при условии непустоты внутренностей тел A и B.

Лемма 4.3 *Пусть A и B — выпуклые тела с непустыми внутренностями и гладкими границами, причем тело A строго выпукло в точке $a \in \partial A$, тело B строго выпукло в точке $b \in \partial B$, и $G_A(a) = G_B(b)$. Обозначим через $[a, a']$ отрезок, высекаемый из тела A прямой, перпендикулярной H и проходящей через точку a. Аналогично определяется отрезок $[b, b']$. Предположим, что*

$$\mathrm{st}_H(A+B) = \mathrm{st}_H(A) + \mathrm{st}_H(B).$$

Тогда $G_A(a') = G_B(b')$.

Доказательство.
Обозначим $C = A + B$. Рассмотрим точку $c = a + b$. Нетрудно видеть, что $c \in \partial C$ и $G_C(c) = G_A(a) = G_B(b)$. Более того, тело C строго выпукло в точке c. Действительно, линейный функционал $\xi = G_A(a)$ в ограничении на тело A достигает максимума в единственной точке a, а в ограничении на тело B — в единственной точке b. Следовательно, в ограничении на тело $C = A+B$ функционал ξ достигает максимального значения в единственной точке $c = a + b$. Обозначим через c' противоположный к c конец отрезка $[c, c']$, высекаемого из тела C прямой, перпендикулярной к H.

Мы хотим доказать, что $G_A(a') = G_B(b')$. Для этого достаточно установить, что $c' = a' + b'$. В самом деле, в точке c' достигается максимум линейного функционала $G_C(c')$ в ограничении на тело C. Однако максимум суммы достигается на сумме максимумов. Следовательно, максимум функционала $G_C(c')$ в ограничении на тело A достигается в точке a', а в ограничении на тело B — в точке b'. Следовательно, $G_A(a') = G_B(b') = G_C(c')$.

Докажем, что $c' = a' + b'$. Обозначим через c_* и c'_* образы точек c и c' соответственно при симметризации относительно гиперплоскости H. Согласно равенству $\mathrm{st}_H(C) = \mathrm{st}_H(A) + \mathrm{st}_H(B)$, найдутся такие точки $a_* \in A$, $b_* \in B$, что $c_* = a_* + b_*$. Тогда, из соображений симметрии, $c'_* = a'_* + b'_*$, где a'_* и b'_* — точки, симметричные точкам a_* и b_* соответственно относительно гиперплоскости H.

Рассмотрим отрезки S_a, S_b и S_c, симметризацией которых получены отрезки $[a_*, a'_*]$, $[b_*, b'_*]$ и $[c_*, c'_*]$ соответственно. Нетрудно видеть, что $S_c = S_a + S_b$. Однако точку c можно представить в виде суммы точки из A и точки из B только единственным образом: $c = a + b$. Следовательно, $a \in S_a$, $b \in S_b$. Поскольку $S_a \subseteq A$, $S_b \subseteq B$, отсюда следует, что $S_a \subseteq [a, a']$, $S_b \subseteq [b, b']$.

Обозначим через $|S|$ длину отрезка S. Тогда получаем: $|S_c| = |S_a| + |S_b|$. Однако, с другой стороны, $|S_c| = |c - c'| = |a - a'| + |b - b'|$. Следовательно, $S_a = [a, a']$, $S_b = [b, b']$. Но отсюда следует, что $c' = a' + b'$, что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы 4.1.
Пусть A и B — выпуклые тела с непустыми внутренностями и гладкими границами. Тогда, поскольку гауссово отображение почти всюду обратимо (предложение 3.1), найдется такая пара точек $a \in \partial A$, $b \in \partial B$, что тело A строго выпукло в точке a, тело B строго выпукло в точке b, и $G_A(a) = G_B(b)$. Если в неравенстве Брунна–Минковского, записанного для тел A и B, реализуется равенство, то тогда, согласно лемме 4.2, для любой гиперплоскости H, проходящей через начало координат,

$$\mathrm{st}_H(A + B) = \mathrm{st}_H(A) + \mathrm{st}_H(B).$$

Таким образом, мы находимся в условиях леммы 4.3.

Рассмотрим произвольный линейный функционал ξ. Пусть H — гиперплоскость $\{x \in \mathbb{R}^d | \ \xi(x) = 0\}$. Пользуясь обозначениями леммы 4.3, можно написать, что $a' = G_A^{-1}(\xi)$, $b' = G_B^{-1}(\xi)$. Таким образом, для всякого линейного функционала ξ отрезки $[a, G_A^{-1}(\xi)]$ и $[b, G_B^{-1}(\xi)]$ параллельны. Если перенести точки a и b в начало координат, то это обстоятельство можно будет записать следующим образом:

$$G_B^{-1} = \alpha G_A^{-1},$$

где α — некоторая скалярная функция. Нетрудно понять, что $\alpha = H_B/H_A$ (это вытекает из определения опорной функции).

Воспользуемся теперь предложением 3.2: $G_A^{-1} = dH_A$, $G_B^{-1} = dH_B$. Следовательно, $dH_B = (H_B/H_A)dH_A$. Кроме того, функция H_B/H_A (определенная всюду кроме нуля) отлична от нуля на всей области определения. Отсюда и из правила Лейбница вытекает, что $H_B/H_A = const$. Таким образом, опорные функции выпуклых тел A и B пропорциональны. Но это означает, что пропорциональны и сами тела. □

Заметим, что кроме описанного выше, неравенство Брунна–Минковского допускает и другие случаи равенства. Например, если рассмотреть два непараллельных отрезка A и B в трехмерном пространстве, то $\mathrm{Vol}(A) = \mathrm{Vol}(B) = \mathrm{Vol}(A + B) = 0$, то есть в неравенстве Брунна–Минковского реализуется равенство. Однако тела A и B не пропорциональны.