Выпуклые тела и выпуклые многогранники

Лекция 3

1 Разложение Штейнера–Минковского

Начнем с некоторых элементарных примеров. Например, посчитаем площадь ε-окрестности Δ_ε некоторого треугольника Δ. Для этого заметим, что фигура Δ_ε естественным образом разбивается на три части (см. рис. 1).

Первая часть состоит из самого треугольника Δ. Площадь первой части равна $S(\Delta)$. Вторая часть состоит из прямоугольников, основания которых лежат на сторонах треугольника Δ. Так как длины боковых сторон всех этих прямоугольников равны ε, площадь второй части равна $\varepsilon l(\Delta)$ (где $l(\Delta)$ — периметр треугольника Δ). Наконец, третья часть состоит из секторов круга радиуса ε. Центр каждого сектора совпадает с одной из вершин треугольника. Нетрудно видеть, что если перенести параллельно все эти секторы таким образом, чтобы их центры совпали, то мы получим целый круг. Следовательно, площадь третьей части равна $\pi\varepsilon^2$. В результате получаем следующее разложение:

$$S(\Delta_\varepsilon) = S(\Delta) + \varepsilon l(\Delta) + \varepsilon^2\pi.$$

Это *разложение Штейнера–Минковского* для треугольника.

Заметим, что площадь ε-окрестности треугольника представляет собой многочлен второй степени от ε. Кроме того, наши рассуждения с тем же успехом применимы к произвольному выпуклому многоугольнику. Поэтому площадь ε-окрестности выпуклого многоугольника тоже является многочленом второй степени от ε, причем все коэффициенты этого многочлена имеют простой геометрический смысл. Свободный член равен площади исходного многоугольника, коэффициент при ε равен периметру, а коэффициент при ε^2 равен π (площади единичного круга).

Далее, путем предельного перехода, формулу для ε-окрестности можно распространить на произвольные выпуклые фигуры. Дело в том, что если мы будем приближать выпуклую фигуру на плоскости выпуклыми многоугольниками, то площади многоугольников и их периметры будут стремиться к площади и, соответственно, длине границы выпуклой фигуры.

Выпишем теперь разложение Штейнера–Минковского для тетраэдра. Обозначим тетраэдр через Δ, а его ε-окрестность — через Δ_ε. Выпуклое тело Δ_ε естественным образом разбивается на четыре части (см. рис. 2).

Первая часть — сам тетраэдр (его объем равен $\mathrm{Vol}(\Delta)$). Вторая часть состоит из цилиндров высоты ε над гранями тетраэдра. Объем этой части равен $\varepsilon S(\partial\Delta)$. Третья часть соответствует ребрам тетраэдра. К каждому ребру примыкает фигура, представляющая собой прямое произведение ребра на некоторый сектор круга радиуса ε. Обозначим через l длину ребра, а через α — угол

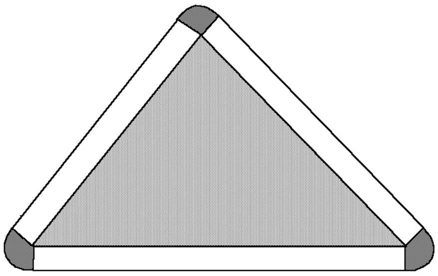

Рис. 1: ε-окрестность треугольника

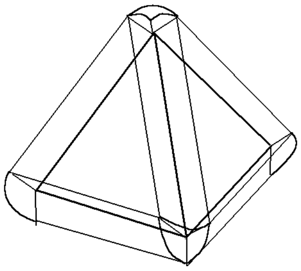

Рис. 2: ε-окрестность тетраэдра

соответствующего сектора. Угол α образован перпендикулярами к граням, содержащим рассматриваемое ребро. Объем третьей части равен $\sum l\alpha\varepsilon^2/2$, где суммирование ведется по всем ребрам тетраэдра. Наконец, четвертая часть состоит из секторов шара, примыкающих к вершинам. Если сложить вместе все эти секторы, получится целый шар (это уже не столь очевидно, как в двумерном случае, но все же можно усмотреть из рисунка). Таким образом, получаем разложение Штейнера–Минковского для тетраэдра:

$$\mathrm{Vol}(\Delta_\varepsilon) = \mathrm{Vol}(\Delta) + \varepsilon S(\partial\Delta) + \frac{\varepsilon^2}{2}\sum l\alpha + \varepsilon^3\frac{4}{3}\pi.$$

Мы видим, что объем ε-окрестности тетраэдра является многочленом третьей степени от ε. Точно также выглядит формула для объема ε-окрестности произвольного выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим теперь трехмерное выпуклое тело, не являющееся многогранником. Будем приближать это тело выпуклыми многогранниками. Посмотрим, во что переходит разложение Штейнера–Минковского. Свободный член, очевидно, стремится к объему выпуклого тела. Коэффициент при ε стремится к площади поверхности, а старший член вообще не зависит от выпуклого тела и равен объему шара радиуса ε.

Задача. Докажите, что коэффициент при ε^2 стремится к интегралу по поверхности тела от средней кривизны тела.

Сформулируем обобщение полученных результатов на случай произвольной размерности:

Теорема 1.1 (Штейнер, Минковский) *Пусть A — выпуклое тело в пространстве $\mathbb{R}^d$. Объем ε-окрестности тела A является многочленом от ε степени d:*

$$\mathrm{Vol}(A_\varepsilon) = \mathrm{Vol}(A) + \varepsilon\mathrm{Vol}(\partial A) + \cdots + \varepsilon^d\mathrm{Vol}(B),$$

где B — единичный шар.

Теорему Штейнера–Минковского можно доказывать точно так же, как в двумерном и трехмерном случаях. Именно, выпуклое тело следует приближать выпуклыми многогранниками, а для выпуклых многогранников объем ε-окрестности считается явно. Однако мы вскоре докажем некоторое более общее утверждение, из которого разложение Штейнера–Минковского получается как формальное следствие.

2 Пространство виртуальных выпуклых тел

Мы знаем, что выпуклые тела можно складывать (по Минковскому) и умножать на неотрицательные числа. Очень полезно дополнить множество выпуклых тел до векторного пространства. Для этого достаточно дополнить полугруппу выпуклых тел (относительно сложения по Минковскому) до группы. Обсудим более общую ситуацию.

Предложение 2.1 *Пусть G — коммутативная полугруппа. Предположим, что выполняется* условие сокращения*:*

$$(\forall a, b, c \in G) \quad a + c = b + c \quad \Longrightarrow \quad a = b.$$

Тогда существует наименьшая группа $\hat{G}$, содержащая полугруппу G. Группа $\hat{G}$ единственна с точностью до изоморфизма.

Доказательство.
Действительно, рассмотрим множество формальных разностей вида $a-b$, где $a, b \in G$. Введем на этом множестве отношение эквивалентности: $a-b \sim c-d$, если $a+d=c+b$. Фактормножество $\hat{G}$ множества формальных разностей по описанному отношению эквивалентности наделяется структурой группы. При этом определено естественное вложение $G \to \hat{G}$. Теперь нетрудно показать, что $\hat{G}$ — наименьшая группа, содержащая G, и что эта группа единственна с точностью до изоморфизма. □

Итак, если полугруппа G удовлетворяет условию сокращения, то она естественным образом дополняется до некоторой группы. Верно и обратное: если полугруппа G лежит хоть в какой-нибудь группе, то она удовлетворяет условию сокращения (поскольку в группе условие сокращения всегда выполняется).

Однако, даже если условие сокращения не выполняется, с полугруппой G можно связать некоторую группу $\hat{G}$. Снова рассмотрим множество всех формальных разностей. Однако отношение эквивалентности нужно определить по-другому (отношение, определенное в ходе доказательства предложения 2.1, уже, вообще говоря, не будет транзитивным). Положим $a-b \sim c-d$, если найдется такой элемент $r \in G$, что $a+d+r=c+b+r$. Фактормножество $\hat{G}$ множества формальных разностей по этому отношению эквивалентности наделяется естественной структурой группы. Группа $\hat{G}$ называется *группой Гротендика* полугруппы G. Имеется естественное отображение $G \to \hat{G}$ (вообще говоря, не являющееся вложением).

Предложение 2.2 *Полугруппа всех выпуклых тел удовлетворяет условию сокращения.*

Доказательство.
Пусть A, B и C — такие выпуклые тела, что $A+C=B+C$. Тогда для опорных функций этих тел получаем $H_A+H_C=H_B+H_C$. Но функции можно вычитать, поэтому $H_A=H_B$. Отсюда вытекает, что выпуклые тела A и B совпадают. □

Следовательно, полугруппа выпуклых тел вкладывается в группу Гротендика. Нетрудно проверить, что группа Гротендика в данном случае будет векторным пространством.

Определение. Назовем это пространство *пространством виртуальных выпуклых тел*. Виртуальные выпуклые тела — это формальные разности выпуклых тел.

Задача. Пусть A — конечное подмножество целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$. Докажите, что для достаточно большого натурального числа N имеет место равенство $\mathrm{conv}(NA) = N\,\mathrm{conv}(A)$.

Задача. Пусть G — полугруппа всех конечных подмножеств целочисленной решетки относительно сложения по Минковскому. Докажите, что каждое конечное подмножество $A \subset \mathbb{Z}^d$ совпадает в группе Гротендика $\hat{G}$ с множеством всех целых точек многогранника $\mathrm{conv}(A)$.

Со всяким выпуклым телом связана опорная функция. С виртуальным выпуклым телом $A-B$ (A и B — настоящие выпуклые тела) можно связать функцию $H_{A-B}=H_A-H_B$, которую естественно назвать *опорной функцией виртуального выпуклого тела* $A-B$.

Предложение 2.3 *Всякая достаточно гладкая положительно однородная степени 1 функция на сопряженном пространстве $\mathbb{R}^{d*}$ является опорной функцией некоторого виртуального выпуклого тела.*

Доказательство.
Опорные функции выпуклых тел — это в точности выпуклые положительно однородные степени 1 функции. Пусть f — произвольная положительно однородная степени 1 функция, а g — опорная функция единичного шара. Докажем, что для достаточно большого числа R функция $f+Rg$ будет выпуклой.

Форма d^2g всюду положительно определена. Поэтому нетрудно подобрать такое число $R>0$, что в ограничении на единичную сферу $Rd^2g+d^2f>0$, то есть форма Rd^2g+d^2f положительно определена. Вторые дифференциалы d^2f и d^2g положительно однородных функций степени 1 являются положительно однородными отображениями степени -1. Следовательно, неравенство $Rd^2g+d^2f>0$ выполняется на всем сопряженном пространстве. Но отсюда следует, что функция $Rg+f$ является выпуклой. Значит, $Rg+f=H_A$ для некоторого выпуклого тела A. Если через B обозначить единичный шар, то $g=H_B$. Следовательно, $f=H_{A-RB}$, что и требовалось доказать. □

3 Многочлен объема

Определение. Пусть $\mathcal{V}$ — некоторое бесконечномерное векторное пространство. Функция $P : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ называется *многочленом степени* $\leqslant m$, если в ограничении на каждое конечномерное подпространство пространства $\mathcal{V}$ эта функция дает многочлен степени $\leqslant m$.

Задача. Верно ли, что если на каждом двумерном подпространстве пространства $\mathcal{V}$ функция P является многочленом степени $\leqslant m$, то функция P вообще является многочленом степени $\leqslant m$?

Теорема 3.1 *Функция объема продолжается до некоторого многочлена на пространстве виртуальных выпуклых тел.*

Доказательство.
Введем систему координат $x_1, \ldots, x_d$ в пространстве $\mathbb{R}^d$. Объем выпуклого тела A можно записать как интеграл по телу A от формы объема:

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_A dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d.$$

По теореме Стокса, интеграл от формы объема сводится к некоторому интегралу по поверхности тела A:

$$\int_A dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d = \int_{\partial A} x_1 \cdot dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d.$$

Здесь существенно, что дифференциал формы $x_1 \cdot dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d$ равен форме объема, а коэффициенты этой формы полиномиально зависят от координат. Конечно, можно написать и много других форм, обладающих теми же свойствами.

Напомним, что поверхность ∂A является образом единичной сферы при отображении dH_A. При помощи этого отображения интеграл по поверхности можно свести к интегралу по сфере:

$$\int_{\partial A} x_1 \cdot dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d = \int_{S^{d-1}} (dH_A)^*(x_1 \cdot dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d).$$

Отображение dH_A линейно зависит от A. Ассоциированное отображение на дифференциальных формах с полиномиальными коэффициентами полиномиально зависит от A. В частности, дифференциальная форма $(dH_A)^*(x_1 \cdots dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d)$ является полиномом от A. Интеграл представляет собой линейный функционал на пространстве дифференциальных форм. Следовательно, интеграл от формы $(dH_A)^*(x_1 \cdots dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d)$ тоже полиномиально зависит от A. Но этот интеграл равен объему тела A. Значит, объем тела A полиномиально зависит от A. $\square$

Пространство настоящих выпуклых тел является открытым конусом в векторном пространстве виртуальных выпуклых тел. Следовательно, функция объема продолжается до многочлена единственным образом. Полученный многочлен но пространстве виртуальных выпуклых тел назовем *многочленом объема.*

Из доказанной теоремы вытекает разложение Штейнера–Минковского: если A — произвольное выпуклое тело, а B — единичный шар, то значение многочлена объема $\mathrm{Vol}(A + \varepsilon B)$ является многочленом от ε.

4 Поляризация однородного многочлена

Определение. Пусть $\mathcal{V}$ — векторное пространство. Функция $P : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ называется *однородной степени* d если

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathcal{V}) \quad P(\lambda x) = \lambda^d P(x).$$

Если P является многочленом и вместе с тем однородной функцией степени d, то степень P как многочлена тоже равна d. В этом случае говорят об *однородном многочлене степени* d.

Очевидно, многочлен объема на виртуальных выпуклых телах в $\mathbb{R}^d$ является однородным многочленом степени d.

Определение. Пусть P — однородный многочлен степени d на векторном пространстве $\mathcal{V}$. *Поляризацией* многочлена P называется d-линейная симметричная форма $\mathcal{V}^{\otimes d} \to \mathbb{R}$ (которую мы будем обозначать той же буквой P), такая что

$$(\forall x \in \mathcal{V}) \quad P(x, x, \ldots, x) = P(x).$$

Пример. Пусть P — квадратичная форма. Предположим, что форма P допускает некоторую поляризацию. Тогда, в силу билинейности,

$$P(a+b) = P(a+b, a+b) = P(a) + 2P(a,b) + P(b),$$

откуда

$$P(a,b) = \frac{P(a+b) - P(a) - P(b)}{2}.$$

Обратно, нетрудно проверить, что выписанная формула задает поляризацию формы P. Билинейность вытекает из следующего простого соображения:

Лемма 4.1 *Пусть P — однородный многочлен степени d на векторном пространстве $\mathcal{V}$, и пусть $b \in \mathcal{V}$ — фиксированный вектор. Тогда функция $Q(a) = P(a+b) - P(a)$ является многочленом степени $d-1$ (вообще говоря, неоднородным).*

Пусть $\mathcal{V}$ — векторное пространство. Обозначим через L_a оператор дифференцирования по направлению $a \in \mathcal{V}$. Если $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ — достаточно хорошая функция (например, многочлен), то, по определению,

$$L_a f(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x + at).$$

Нетрудно проверить, что если P — однородный многочлен степени d, то $L_a P$ является однородным многочленом степени $d-1$.

Нам пригодится следующий бесконечномерный вариант теоремы Эйлера об однородных функциях:

Лемма 4.2 *Пусть P — однородный многочлен степени d на пространстве $\mathcal{V}$. Тогда для всякой точки $a \in \mathcal{V}$ имеет место равенство*

$$L_a P(a) = d \cdot P(a).$$

Эта лемма доказывается точно так же как обычная теорема Эйлера. Достаточно посчитать производную в единице от функции $\varphi(\lambda) = P(\lambda a)$ двумя способами: один раз при помощи теоремы о сложной функции, а второй раз воспользовавшись однородностью.

Следствие 4.3 *Для всякого однородного многочлена степени d имеем*

$$L_a^d P = d! P(a).$$

Замечание. В левой части выписанного равенства стоит результат применения оператора L_a^d степени d к однородному многочлену P степени d. Это многочлен степени 0, то есть константа. Утверждается что эта константа равна $d!P(a)$.

Теорема 4.4 *Всякий однородный многочлен степени d обладает единственной поляризацией*

$$P(a_1, \ldots, a_d) = \frac{1}{d!} L_{a_1} \cdots L_{a_d} P.$$

Доказательство.
Форма $P(a_1, \ldots, a_d)$, определенная выше, действительно является поляризацией многочлена P. Билинейность вытекает из того, что $L_{a+b} = L_a + L_b$, симметричность вытекает из перестановочности операторов дифференцирования по различным направлениям. Нужно только проверить, что $P(a, a, \ldots, a) = P(a)$. Но это вытекает из бесконечномерной теоремы Эйлера об однородных функциях (лемма 4.2).

Пусть теперь $P(a_1, \ldots, a_d)$ — произвольная поляризация многочлена P. Можно доказать, что эта поляризация имеет вид $\frac{1}{d!} L_{a_1} \cdots L_{a_d} P$. В самом деле, нетрудно проверить по индукции, что

$$L_{a_1} \cdots L_{a_k} P(x) = \frac{d!}{(d-k)!} P(a_1, \ldots, a_k, x, x, \ldots, x).$$

Для этого достаточно воспользоваться определением производной по направлению и полилинейностью (биномом Ньютона). □

Задача. Пусть теперь P — однородный многочлен степени 3. Докажите, что поляризация этого многочлена выражается следующей формулой:

$$P(a, b, c) = \frac{P(a+b+c) - P(a+b) - P(b+c) - P(a+c) + P(a) + P(b) + P(c)}{6}.$$

Укажем обобщение этой формулы на случай произвольной степени:

Теорема 4.5 *Обозначим через ε набор $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ из d чисел, каждое из которых равно либо 0, либо 1. Через $|\varepsilon|$ обозначим число нулей в последовательности ε. Поляризацию однородного многочлена P степени d можно записать следующей формулой:*

$$P(a_1, \ldots, a_d) = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^d} (-1)^{|\varepsilon|} P(\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_d a_d).$$

Эту теорему можно доказать двумя способами. Можно, например, проверить, что выписанная формула действительно задает поляризацию многочлена P. Для этого достаточно несколько раз воспользоваться леммой 4.1.

С другой стороны, можно показать, что поляризация многочлена P должна выражаться именно такой формулой. Для этого нужно раскрыть все слагаемые в правой части, пользуясь полилинейностью, и применить принцип включения-исключения.

Задача. Проведите детальное доказательство.

5 Смешанные объемы

Определение. Поляризация многочлена объема на пространстве виртуальных выпуклых тел называется *формой смешанного объема*. Смешанный объем выпуклых тел $A_1, \ldots, A_d$ в пространстве $\mathbb{R}^d$ обозначается через $\mathrm{Vol}(A_1, \ldots, A_d)$.

Приведем некоторые примеры вычисления смешанных объемов. Пусть A — выпуклая фигура на плоскости, а B — единичный круг. Тогда $A + \varepsilon B$ — это ε-окрестность фигуры A. Как мы уже знаем, площадь ε-окрестности равна

$$S(A + \varepsilon B) = S(A_\varepsilon) = S(A) + \varepsilon l(A) + \varepsilon^2 \pi.$$

С другой стороны, согласно биному Ньютона,

$$S(A + \varepsilon B) = S(A) + 2\varepsilon S(A, B) + \varepsilon^2 S(B),$$

где $S(A, B)$ — смешанная площадь фигур A и B. Следовательно, $S(A, B) = l(A)/2$.

Аналогично, если A — пространственное выпуклое тело, а B — единичный шар, то $\mathrm{Vol}(A, A, B) = S(\partial A)/3$. Смешанный объем $\mathrm{Vol}(A, B, B)$ равен с коэффициентом $1/3$ интегралу по поверхности тела A от средней кривизны этой поверхности.

Вычислим теперь смешанную площадь двух выпуклых многоугольников. Пусть A — выпуклый многоугольник на плоскости. Обозначим через $H_i(A)$ *опорные числа* многоугольника A, то есть длины перпендикуляров, опущенных на стороны (или на продолжения сторон) из начала координат. Длину перпендикуляра следует взять со знаком плюс, если начало координат лежит по ту же сторону от соответствующей стороны многоугольника A, что и сам многоугольник. Иначе опорное число нужно взять со знаком минус.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — единичные направляющие ковекторы сторон многоугольника A. Тогда, как нетрудно проверить, $H_i = H_A(\xi_i)$.

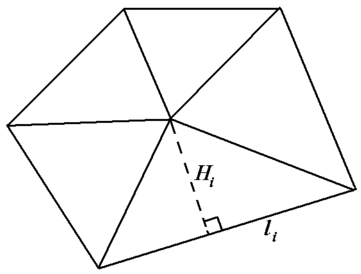

Рис. 3: Вычисление площади выпуклого многоугольника

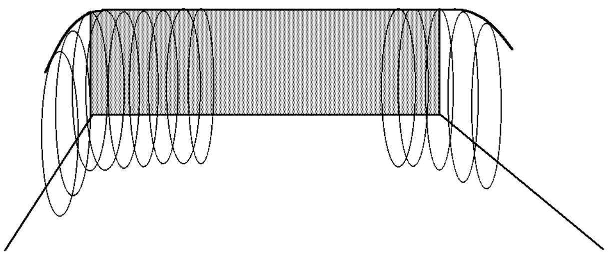

Рис. 4: Вычисление смешанной площади.

Обозначим через $l_i(A)$ длину стороны многоугольника A с направляющим ковектором ξ_i. Имеет место следующая формула для площади многоугольника A:

$$S(A) = \frac{1}{2} \sum H_i(A) l_i(A).$$

Предположим для простоты, что начало координат лежит внутри многоугольника A. Тогда этот многоугольник разбивается на треугольники с общей вершиной в начале координат (см. рис. 3). Площади треугольников равны $H_i(A)l_i(A)/2$. Отсюда и получается выписанная формула для площади многоугольника.

Пусть теперь B — произвольная фыпуклая фигура на плоскости. Положим $H_i(B) = H_B(\xi_i)$.

Предложение 5.1 *Смешанную площадь многоугольника A и фигуры B можно посчитать по формуле*

$$S(A, B) = \frac{1}{2} \sum H_i(B) l_i(A).$$

Доказательство.
Посчитаем площадь $S(A + \varepsilon B)$ (см. рис. 4). Фигура $A + \varepsilon B$ естественным образом разбивается на три части (как и в случае ε-окрестности). Первая часть состоит из самого многоугольника A. Вторая часть состоит из прямоугольников, лежащих на сторонах многоугольника A. Боковая сторона прямоугольника, лежащего на стороне многоугольника A с направляющим ковектором ξ_i, равна $\varepsilon H_i(B)$. Таким образом, площадь второй части равна $\varepsilon \sum H_i(B) l_i(A)$. Третья часть состоит из кусков фигуры εB, из которых можно составить всю фигуру.

Мы уже знаем, что смешанная площадь $S(A, B)$ равна половине коэффициента при ε в разложении $S(A + \varepsilon B)$. Следовательно, $S(A, B) = \frac{1}{2} \sum H_i(B) l_i(A)$, что и требовалось доказать. $\square$

Предположим теперь, что A и B — выпуклые многоугольники. Предложение 5.1 содержит несимметричную формулу для вычисления смешанной площади. Однако сама смешанная площадь симметрична. Если подставить в равенство $S(A, B) = S(B, A)$ выражения для смешанных площадей из предложения 5.1, то получим некоторое нетривиальное утверждение из элементарной геометрии выпуклых многоугольников.

Пусть теперь A — произвольный выпуклый многогранник. Обозначим через $\xi_1, \ldots, \xi_d$ направляющие ковекторы его гиперплоских граней $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_d$ соответственно. Число $H_i(A) = H_A(\xi_i)$

называется *опорным числом* грани Γ_i. Обозначим через $\mathrm{Vol}^i(A)$ $(d-1)$-мерный объем гиперплоской грани Γ_i. Имеет место следующая формула для вычисления объема многогранника A:

$$\mathrm{Vol}(A) = \frac{1}{d}\sum H_i(A)\mathrm{Vol}^i(A).$$

Эта формула может быть получена точно так же, как и в плоском случае. Именно, если начало координат лежит внутри многогранника, то многогранник разбивается в объединение конусов над гиперплоскими гранями. Вершины всех конусов совпадают с началом координат. Объем конуса над Γ_i равен $\frac{1}{d}H_i(A)\mathrm{Vol}^i(A)$.

Пусть B — произвольное выпуклое тело. Совершенно аналогично плоскому случаю, получаем формулу

$$\mathrm{Vol}(A, A, \ldots, A, B) = \frac{1}{d}\sum H_i(B)\mathrm{Vol}^i(A).$$

Здесь $H_i(B) = H_B(\xi)$ — значения опорной функции тела B на направляющих ковекторах гиперплоских граней многогранника A.