Выпуклые тела и выпуклые многогранники

Лекция 4

1 Неравенство Минковского

Переформулируем неравенство Брунна–Минковского в терминах смешанных объемов. Рассмотрим функцию
$$\varphi(\lambda)=\sqrt[d]{\mathrm{Vol}(\lambda A+(1-\lambda)B)}.$$
Согласно неравенству Брунна–Минковского, эта функция выпукла вверх (вогнута). Следовательно, $\varphi''(0)\leqslant 0$. Посчитаем $\varphi''(0)$. Для этого достаточно выписать разложение $\varphi(\lambda)$ по степеням λ до членов второго порядка включительно. Заметим, что в пространстве виртуальных выпуклых тел

$$\mathrm{Vol}(\lambda A+(1-\lambda)B)=\mathrm{Vol}(B+\lambda(A-B)).$$

Таким образом, в разложении функции φ по степеням λ будут участвовать смешанные объемы, в которых не более двух аргументов совпадает с A (или $A-B$), а все остальные аргументы совпадают с B. Поэтому удобно ввести следующее обозначение:

$$(C,D)=\mathrm{Vol}(C,D,B,B,\dots,B).$$

Это обозначение оправдывается тем, что (C,D) представляет собой билинейную форму от C и D.

По формуле бинома Ньютона, с точностью до членов третьего порядка,

$$\mathrm{Vol}(B+\lambda(A-B))=(B,B)+d\lambda(A-B,B)+\frac{d(d-1)}{2}\lambda^2(A-B,A-B).$$

Из этого выражения нужно извлечь корень степени d с точностью до членов третьего порядка. Обозначим $X=(A-B,B)/(B,B)$, $Y=(A-B,A-B)/(B,B)$. В этих обозначениях подкоренное выражение принимает вид
$$(B,B)\left(1+d\lambda X+\frac{d(d-1)}{2}\lambda^2 Y\right).$$

Согласно формуле Маклорена,

$$\sqrt[d]{1+d\lambda X+\frac{d(d-1)}{2}\lambda^2 Y}=1+\lambda X+\frac{d-1}{2}\lambda^2(Y-X^2).$$

Условие $\varphi''(0)\leqslant 0$ эквивалентно неравенству $Y\leqslant X^2$. Подставив сюда выражения для X и Y и раскрыв скобки, получим
$$(A,B)^2\geqslant (A,A)(B,B),$$
или, учитывая определение билинейной формы $(\cdot,\cdot)$,

$$\mathrm{Vol}(A,B,B,\dots,B)\geqslant \mathrm{Vol}(A,A,B,B,\dots,B)\mathrm{Vol}(B).$$

Это неравенство называется *неравенством Минковского*.

Неравенство Минковского — это не что иное, как обращенное неравенство Коши–Буняковского для билинейной формы $(\cdot,\cdot)$. Напомним, что обращенное неравенство Коши–Буняковского выполняется для квадратичных форм, положительный индекс инерции которых равен 1. Тому высказыванию, что положительный индекс инерции некоторой квадратичной формы равен 1, можно придать смысл и в бесконечномерной ситуации.

Определение. Пусть $(\cdot,\cdot)$ — билинейная форма на векторном пространстве $\mathcal{V}$. *Положительный индекс инерции этой формы равен 1*, если

- найдется такой вектор $b \in \mathcal{V}$, что $(b, b) > 0$,
- для всякого вектора a, не пропорционального b, найдется такой коэффициент α, что

$$(\alpha a + b, \alpha a + b) \leqslant 0.$$

Предложение 1.1 *Пусть вектор b удовлетворяет неравенству $(b, b) > 0$. Форма $(\cdot,\cdot)$ имеет положительный индекс инерции 1 тогда и только тогда, когда для всякого $a \in \mathcal{V}$ выполняется обращенное неравенство Коши–Буняковского:*

$$(a, b)^2 \geqslant (a, a)(b, b).$$

Доказательство.
Положительный индекс инерции равен 1 тогда и только тогда, когда для всякого $a \in \mathcal{V}$ квадратный трехчлен $q(\alpha) = (\alpha a+b, \alpha a+b)$ имеет по крайней мере один корень, то есть его дискриминант неотрицателен. Условие неотрицательности дискриминанта выражается неравенством $(a, b)^2 \geqslant (a, a)(b, b)$. $\square$

Таким образом, форма смешанного объема $(\cdot,\cdot) = \mathrm{Vol}(\cdot,\cdot, B, B, \ldots, B)$ имеет положительный индекс инерции 1. Более того, тело B лежит внутри светового конуса этой формы. На самом деле, все настоящие выпуклые тела лежат внутри светового конуса. Это мы увидим позже, когда докажем неравенство Александрова–Фенхеля.

2 Пространство аналогичных многогранников

Пространство виртуальных выпуклых тел допускает естественные конечномерные приближения. Мы сейчас определим некоторый естественный класс конечномерных подпространств пространства виртуальных выпуклых тел, такой что любое число выпуклых тел можно с любой точностью приблизить элементами некоторого пространства этого класса.

Начнем с двумерного случая.

Определение. Многоугольники A и B называются *аналогичными*, если между их сторонами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие стороны имеют одинаковые направления внешних нормалей (и, в частности, параллельны).

Фиксируем некоторый выпуклый многоугольник Δ. Обозначим внешние нормали к этому многоугольнику через $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Всякий многоугольник A, аналогичный Δ, однозначно определяется своими опорными числами $H_i(A) = H_A(\xi_i)$. Если сложить два многоугольника, аналогичных Δ, то, как нетрудно видеть, снова получится многоугольник, аналогичный Δ. Следовательно, выпуклые многоугольники, аналогичные Δ, образуют полугруппу относительно сложения по Минковскому. Группа Гротендика этой полугруппы является конечномерным подпространством пространства виртуальных выпуклых тел. Назовем это подпространство *пространством аналогичных многоугольников* (или, более подробно, *пространством виртуальных многоугольников, аналогичных Δ*).

Рассмотрим многомерный случай. Дадим по индукции определение аналогичных многогранников.

Определение. Два многогранника называются *аналогичными*, если между их гиперплоскими гранями можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие грани имеют одинаковые направления внешних нормалей и аналогичны. Имеет смысл говорить об аналогичности многогранников, лежащих в параллельных гиперплоскостях, поскольку их можно всегда перенести в одну гиперплоскость.

Фиксируем некоторый многогранник Δ. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — единичные внешние нормали его гиперплоских граней. Всякий многогранник A, аналогичный Δ, однозначно определяется набором своих опорных чисел $H_i(A) = H_A(\xi_i)$.

Множество всех выпуклых многогранников, аналогичных Δ, является полугруппой относительно сложения по Минковскому. Группа Гротендика этой полугруппы представляет собой конечномерное подпространство пространства виртуальных выпуклых тел. Это подпространство называется *пространством аналогичных многогранников* (более точно, *пространством виртуальных многогранников, аналогичных Δ*).

Формула для смешанного объема аналогичных многогранников имеет особенно простой вид. Как мы показали на прошлой лекции, для любого многогранника A, аналогичного Δ,

$$\mathrm{Vol}(A) = \frac{1}{d} \sum H_i(A) \mathrm{Vol}^i(A),$$

где $\mathrm{Vol}^i(A)$ — это объем гиперплоской грани многогранника A с внешней нормалью ξ_i. Кроме того, мы показали, что для выпуклых многогранников A и X, аналогичных Δ,

$$\mathrm{Vol}(A, X, X, \ldots, X) = \frac{1}{d} \sum H_i(A) \mathrm{Vol}^i(X).$$

Функция Vol^i представляет собой, очевидно, некоторый однородный многочлен степени $d-1$ на пространстве виртуальных многогранников, аналогичных Δ. Значение поляризации $\mathrm{Vol}^i(A_2, \ldots, A_d)$ этого многочлена на некотором наборе многогранников $A_2, \ldots, A_d$ совпадает со смешанным $(d-1)$-мерным объемом гиперплоских граней этих многогранников с внешней нормалью ξ_i. Перед тем как считать смешанный объем, все грани нужно перенести в общую гиперплоскость. Можно записать следующую формулу для смешанного объема нескольких аналогичных многогранников:

$$\mathrm{Vol}(A_1, \ldots, A_d) = \frac{1}{d} \sum H_i(A_1) \mathrm{Vol}^i(A_2, \ldots, A_d).$$

Эта формула вытекает из следующего простого утверждения:

Лемма 2.1 *Пусть P — некоторый однородный многочлен степени d на некотором векторном пространстве $\mathcal{V}$. Для вектора $a \in \mathcal{V}$ положим $Q_a(x) = P(a, x, x, \ldots, x)$. Тогда*

$$Q_{a_1}(a_2, \ldots, a_d) = P(a_1, a_2, \ldots, a_d).$$

В некотором частном случае (представляющем большой интерес) можно явно указать систему координат в пространстве аналогичных многогранников.

Определение. Многогранник Δ в $\mathbb{R}^d$ называется *простым*, если в окрестности каждой своей вершины он выглядит как симплициальный конус. В частности, в каждой вершине сходятся ровно d ребер и ровно d гиперплоских граней.

Простые многогранники — это многогранники общего положения относительно гиперплоских граней. Сколь угодно малым шевелением гиперплоских граней из произвольного выпуклого многогранника можно получить простой. Если же немного пошевелить гиперплоские грани простого многогранника, то он останется простым.

Пусть Δ — простой многогранник. Обозначим через $\mathcal{V}$ векторное пространство всех виртуальных многогранников, аналогичных Δ.

Предложение 2.2 *Всякое опорное число H_i продолжается до линейного функционала на пространстве $\mathcal{V}$. Полученные линейные функционалы образуют базис пространства $\mathcal{V}^*$, то есть задают систему линейных координат на $\mathcal{V}$. В частности, размерность пространства $\mathcal{V}$ равна количеству гиперплоских граней многогранника Δ.*

Доказательство.
Нетрудно видеть, что $H_i(A + B) = H_i(A) + H_i(B)$ и $H_i(\alpha A) = \alpha H_i(A)$ при $\alpha \geqslant 0$. Следовательно, H_i продолжается до линейного функционала на пространстве $\mathcal{V}$.

Пусть теперь A — многогранник, аналогичный многограннику Δ. Тогда для всякого набора достаточно маленьких чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ существует единственный многогранник B, аналогичный Δ и такой что $H_i(B) = H_i(A) + \varepsilon_i$. Отсюда вытекает, что функционалы H_i образуют систему координат на пространстве $\mathcal{V}$. $\square$

Рассмотрим на пространстве виртуальных многогранников, аналогичных Δ, форму смешанного объема $(A, B) = \mathrm{Vol}(A, B, \Delta, \ldots, \Delta)$. Согласно неравенству Минковского, в некоторой системе координат $x_1, \ldots, x_m$ эта форма записывается в виде

$$(A, A) = x_1(A)^2 - x_2(A)^2 - \cdots - x_n(A)^2, \quad n \leqslant m$$

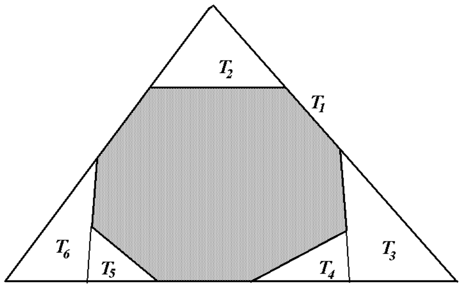

Рис. 1: Выбор ортогональной системы координат для смешанной площади

В двумерном случае можно явно указать такую систему координат.

Пусть Δ — выпуклый многоугольник. Впишем многоугольник Δ в некоторый треугольник T_1 (см. рис. 1). Тогда Δ можно представить в виде разности описанного треугольника T_1 и нескольких других треугольников:

$$\Delta = T_1 - T_2 - \cdots - T_n.$$

Процесс вырезания многоугольника Δ из треугольника T_1 можно организовать таким образом, чтобы каждый многоугольник A, аналогичный Δ, естественным образом представлялся бы в виде

$$A = T_1(A) - T_2(A) - \cdots - T_n(A),$$

где $T_i(A)$ — треугольник, аналогичный (то есть подобный) треугольнику T_i.

Примем за координату $x_i(A)$ какой-нибудь линейный параметр треугольника $T_i(A)$ (например, длину стороны, длину высоты или радиус описанной окружности). Поскольку все треугольники $T_i(A)$ подобны, все линейные параметры будут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем. Далее, поскольку площадь треугольника пропорциональна квадрату линейных размеров, можно считать что $S(T_i(A)) = x_i(A)^2$ (вообще говоря, с некоторым положительным коэффициентом, но коэффициент всегда можно внести в определение координаты x_i). Имеем:

$$S(A) = S(T_1(A)) - S(T_2(A)) - \cdots - S(T_n(A)) = x_1(A)^2 - x_2(A)^2 - \cdots - x_n(A)^2.$$

Таким образом, мы построили ортогональную систему координат для формы смешанной площади на плоскости. Мы видим, что в разложении квадратичной формы S в сумму или разность квадратов фигурирует только один плюс, а остальные минусы. Отсюда еще раз вытекает неравенство Минковского на плоскости.

3 Строго выпуклые функции

В этом разделе мы установим некоторую связь между выпуклыми телами и выпуклыми функциями.

Определение. Функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^d)(\forall \lambda \in [0,1]) \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Функция f называется *строго выпуклой*, если для всяких $x \neq y$ и $\lambda \neq 0, 1$ неравенство строгое.

Определение. Отображение $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d*}$ называется *(монотонно) возрастающим*, если

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^d) \quad (F(x) - F(y), x - y) \geqslant 0.$$

Отображение F называется *строго (монотонно) возрастающим*, если при $x \neq y$ неравенство строгое.

Хорошо известно, что числовая функция выпукла тогда и только тогда, когда ее производная возрастает. Следующее предложение является многомерным аналогом этого утверждения:

Предложение 3.1 *Функция является выпуклой (соответственно, строго выпуклой) тогда и только тогда, когда ее дифференциал возрастает (соответственно, строго возрастает).*

Доказательство.
Докажем, например, что дифференциал выпуклой функции возрастает. Пусть f — выпуклая функция. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

Эта функция определена на отрезке $[0,1]$ и выпукла на этом отрезке. Следовательно, $\varphi'(0) \leqslant \varphi'(1)$. Но, по правилу дифференцирования сложной функции, $\varphi'(0) = (df(y), x-y)$, а $\varphi'(1) = (df(x), x-y)$. Следовательно, $(df(y), x-y) \leqslant (df(x), x-y)$, то есть $(df(x) - df(y), x-y) \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Остальные части предложения доказываются так же просто. □

Следствие 3.2 *Пусть $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — строго выпуклая непрерывно дифференцируемая функция. Тогда $df : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d*}$ — гомеоморфизм на свой образ.*

В самом деле, инъективность вытекает из строгого возрастания.

Теорема 3.3 *Пусть f — выпуклая функция на $\mathbb{R}^d$. Тогда множество $\overline{df(\mathbb{R}^d)}$ выпукло.*

Доказательство.
Рассмотрим множество

$$A_f = \{\xi \in \mathbb{R}^d |\ f - \xi \geqslant const\} \subseteq \mathbb{R}^{d*}.$$

Другими словами, множество A_f состоит из таких линейных функционалов ξ, для которых функция $f - \xi$ ограничена снизу. Множество A_f, очевидно, выпукло и замкнуто. Мы хотим показать, что $A_f = \overline{df(\mathbb{R}^d)}$.

Для всякой точки $a \in \mathbb{R}^d$ имеем $f(x) \geqslant f(a) + d_a f(x-a)$. Следовательно, $f - d_a f \geqslant f(a) - d_a f(a)$, то есть $d_a f \in A_f$. Отсюда следует, что $df(\mathbb{R}^d) \subseteq A_f$.

Осталось только доказать, что $A_f \subseteq \overline{df(\mathbb{R}^d)}$. Действительно, пусть $\varphi \in A_f$. Нужно проверить, что

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} ||d_x f - \varphi|| = 0.$$

Положим $g = f - \varphi$. Нужно доказать, что $\inf_{x\in\mathbb{R}^d} ||d_x g|| = 0$. Предположим противное: $||d_x g|| > \varepsilon > 0$. Тогда $\inf g = -\infty$. Это можно проверить, например, проинтегрировав градиентное поле $-dg$ (впрочем, можно обойтись и более элементарными рассуждениями). □

Доказанная теорема устанавливает некоторую связь между выпуклыми функциями и выпуклыми множествами. Именно, всякой выпуклой функции f соответствует замкнутое выпуклое множество A_f.

Предложение 3.4 *Соответствие $f \mapsto A_f$ аддитивно, то есть*

$$A_{f+g} = A_f + A_g.$$

Доказательство.
Действительно, непосредственно из определения множества A_f очевидно включение $\supseteq$. А из того, что $A_f = \overline{df(\mathbb{R}^d)}$, становится очевидным обратное включение $\subseteq$. □

Предположим теперь, что A_f — это выпуклое тело. Объем этого тела можно легко посчитать в терминах функции f. Именно, обозначив форму объема через vol, имеем:

$$\mathrm{Vol}(A_f) = \int_{df(\mathbb{R}^d)} vol = \int_{\mathbb{R}^d} (df)^*(vol) = \int_{\mathbb{R}^d} \det(d^2 f) vol.$$

Действительно, форма $(df)^*(vol)$ равна форме объема, умноженной на якобиан отображения df, то есть на гессиан функции f.

Из неравенства Брунна–Минковского для выпуклых тел вытекает следующее *неравенство Брунна–Минковского для выпуклых функций*:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \det(d^2(f+g)) vol\right)^{\frac{1}{d}} \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} \det(d^2 f) vol\right)^{\frac{1}{d}} + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \det(d^2 g) vol\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Если задано выпуклое тело $A \subseteq \mathbb{R}^d$, то можно явным образом указать строго выпуклую гладкую функцию f на сопряженном пространстве $\mathbb{R}^{d*}$, для которой $A = A_f$. Например, можно взять

$$f(\xi) = \log \int_A e^{(\xi,a)}\, da.$$

Интегрировать можно по любой мере, носитель которой совпадает с A. Дифференциал функции f

$$df(\xi) = \frac{\int_A a e^{(\xi,a)}\, da}{\int_A e^{(\xi,a)}\, da}$$

переводит точку ξ в центр масс тела A относительно плотности $e^{(\xi,a)}$. В силу выпуклости, этот центр масс принадлежит A. Таким образом, $f(\mathbb{R}^{d*}) \subseteq A$, а значит, $A_f \subseteq A$.

Докажем обратное включение. Предположим для простоты, что тело A всюду строго выпукло. Пусть $a \in \partial A$. Тогда, если $\xi = G_A(a)$, то, как нетрудно проверить, $df(t\xi) \to a$ при $t \to \infty$. Следовательно, любая точка границы множества A является предельной точкой множества $df(\mathbb{R}^{d*})$, то есть $\partial A \subseteq A_f$. Отсюда $A \subseteq A_f$. Мы доказали, таким образом, что $A_f = A$.

В принципе, изучение многих геометрических свойств выпуклого тела A можно свести к изучению соответствующей строго выпуклой функции f. Проблема состоит в том, что не существует никакого канонического выбора строго выпуклой гладкой функции f. Напротив, есть совершенно каноническая функция, правда негладкая и нестрого выпуклая — это опорная функция. Нетрудно проверить, что опорная функция является вырожденным случаем описанной конструкции.