Выпуклые тела и выпуклые многогранники

Лекция 5

1 Неравенство Александрова–Фенхеля

Пусть $B_2, B_3, \ldots, B_d$ — произвольные выпуклые тела, B — выпуклое тело, A — виртуальное выпуклое тело (то есть формальная разность выпуклых тел). А. Д. Александров в 1937 году опубликовал доказательство следующего замечательного обобщения неравенства Минковского:

$$\mathrm{Vol}(A, B, B_2, B_3, \ldots, B_d)^2 \geqslant \mathrm{Vol}(A, A, B_2, B_3, \ldots, B_d)\mathrm{Vol}(B, B, B_2, B_3, \ldots, B_d).$$

Это *неравенство Александрова–Фенхеля.*

Мы докажем неравенство Александрова–Фенхеля по существу тем же методом, которым пользовался Александров. Александров дал два доказательства своего неравенства. Первое доказательство основано на геометрии простых многогранников, а второе — на изучении спектра эллиптических дифференциальных операторов на сфере. Оба доказательства оказались чрезвычайно полезными для дальнейших обобщений и аналогов теории Александрова. Мы будем следовать первому доказательству Александрова.

Первый шаг доказательства состоит в аппроксимации выпуклых тел аналогичными простыми выпуклыми многогранниками. Тем самым мы заменим бесконечномерное пространство виртуальных выпуклых тел некоторым удобным конечномерным приближением.

Лемма 1.1 *Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ — простые выпуклые многогранники. Тогда все многогранники вида*

$$\alpha_1\Delta_1 + \cdots + \alpha_m\Delta_m, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_m > 0$$

аналогичны.

Эту лемму легко доказать индукцией по размерности.

Лемма 1.2 *Произвольное конечное число выпуклых тел можно с любой точностью приблизить аналогичными простыми многогранниками.*

Доказательство.
Любое выпуклое тело, очевидно, можно приблизить выпуклым многогранником. Слегка пошевелив все гиперплоские грани этого многогранника, можно добиться того, чтобы он стал простым. Поэтому всякое выпуклое тело можно приблизить простым многогранником.

Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — выпуклые тела. Приблизим каждое тело A_i простым многогранником Δ_i. Теперь заменим многогранник Δ_i на многогранник $\Delta_i + \varepsilon(\Delta_1 + \cdots + \Delta_m)$, где ε — достаточно маленькое число. С одной стороны, все полученные многогранники будут не сильно отличаться от многогранников Δ_i, а значит, будут по-прежнему приближать тела A_i. С другой стороны, согласно лемме 1.1, все полученные многогранники будут аналогичны. Таким образом, нам удалось приблизить выпуклые тела $A_1, \ldots, A_m$ простыми аналогичными многогранниками. □

Теперь достаточно доказать неравенство Александрова–Фенхеля только для аналогичных простых многогранников. Общий случай получается путем предельного перехода.

2 Многочлен объема в пространстве аналогичных многогранников

Пусть Δ — простой выпуклый многогранник. Обозначим через $\mathcal{L}$ пространство виртуальных многогранников, аналогичных Δ. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — единичные нормали к гиперплоским граням многогранника Δ. Как мы уже знаем, в пространстве $\mathcal{L}$ имеется естественная система линейных координат H_i. Значение координаты H_i на многограннике $A \in \mathcal{L}$ совпадает с опорным числом $H_i(A) = H_A(\xi_i)$. Обозначим через V многочлен объема на пространстве $\mathcal{L}$. Это многочлен от переменных H_i, такой что для всякого многогранника A, аналогичного Δ,

$$V(H_1(A), \ldots, H_n(A)) = \mathrm{Vol}(A).$$

Напомним, что $\mathrm{Vol}^i(A)$ означает объем гиперплоской грани многогранника A с внешней нормалью ξ_i. Следующее утверждение очевидно из геометрических соображений:

Лемма 2.1 *Пусть A — выпуклый многогранник, аналогичный многограннику Δ. Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial H_i} V(H_1(A), \ldots, H_n(A)) = \mathrm{Vol}^i(A).$$

Из леммы 2.1 вытекает, что функция Vol^i, рассматирваемая в ограничении на многогранники, аналогичные Δ, продолжается до некоторого однородного многочлена степени $d-1$ на пространстве $\mathcal{L}$. Обозначим этот многочлен через V^i. Рассмотрим грань Δ^i многогранника Δ с внешней нормалью ξ_i. Пространство виртуальных $(d-1)$-мерных многогранников, аналогичных Δ, обозначим через $\mathcal{L}^i$. Отображение, сопоставляющее каждому многограннику, аналогичному Δ, его гиперплоскую грань в направлении ξ_i, продолжается до линейного отображения $\mathcal{L} \to \mathcal{L}^i$. Из леммы 2.1 вытекает, что многочлен V^i получается из многочлена объема в пространстве $\mathcal{L}^i$ как обратный образ при указанном линейном отображении. Поэтому в некотором смысле многочлен V^i можно отождествлять с многочленом объема в пространтсве $\mathcal{L}^i$.

Лемма 2.2 *Оператор L_A дифференцирования по направлению $A \in \mathcal{L}$ можно выразить в координатах следующим образом:*

$$L_A = \sum H_i(A) \frac{\partial}{\partial H_i}.$$

Доказательство.
Если в некотором конечномерном векторном пространстве введена система координат $(x_1, \ldots, x_n)$, а вектор a имеет координаты $a_1, \ldots, a_n$, то опрератор L_a дифференцирования по направлению a записывается как

$$L_a = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Это вытекает из теоремы о дифференцировании сложной функции. $\square$

Напомним, что смешанный объем виртуальных многогранников $A_1, \ldots, A_d$, аналогичных многограннику Δ, выражается формулой

$$\mathrm{Vol}(A_1, \ldots, A_d) = \frac{1}{d!} L_{A_1} \cdots L_{A_d}(V).$$

3 Доказательство неравенства Александрова–Фенхеля

Пусть Δ — некоторый простой выпуклый многогранник. Пусть $B_2, B_3, \ldots, B_d$ — многогранники, аналогичные Δ. Обозначим

$$(C, D) = \mathrm{Vol}(C, D, B_2, B_3, \ldots, B_d) = \frac{1}{d!} L_C L_D L_{B_2} L_{B_3} \cdots L_{B_d}(V).$$

Нам нужно доказать, что билинейная форма $(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет обращенному неравенству Коши–Буняковского на пространстве виртуальных многогранников, аналогичных Δ.

Лемма 3.1 *Пусть $(\cdot,\cdot)$ — квадратичная форма на векторном пространстве $\mathcal{L}$ и пусть $b \in \mathcal{L}$ — такой вектор, что $(b, b) > 0$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) Для всякого вектора $a \in \mathcal{L}$ выполняется неравенство $(a, b)^2 \geqslant (a, a)(b, b)$,

(ii) Для всякого вектора $a \in \mathcal{L}$, такого что $(a, b) = 0$, выполняется неравенство $(a, a) \leqslant 0$.

Доказательство.
Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ очевидна. Предположим, что выполнено утверждение (ii) и пусть $a \in \mathcal{L}$ — произвольный вектор. Тогда для числа $\alpha = (a,b)/(b,b)$ имеем $(a - \alpha b, b) = 0$. Согласно (ii), отсюда следует, что $(a - \alpha b, a - \alpha b) \leqslant 0$. Подставляя сюда выражение для α, получаем неравенство $(a,b)^2 \geqslant (a,a)(b,b)$. $\square$

Лемма 3.2 *Ядро формы $(\cdot,\cdot)$ состоит из всех виртуальных многогранников $A \in \mathcal{L}$, таких что*

$$L_A L_{B_3} \cdots L_{B_d} V = 0.$$

Доказательство.
Действительно, пусть виртуальный многогранник $A \in \mathcal{L}$ принадлежит ядру формы $(\cdot,\cdot)$. Это означает, что для всякого виртуального многогранника $C \in \mathcal{L}$ имеем $(C,A) = \frac{1}{d!} L_C L_A L_{B_3} \cdots L_{B_d} V = 0$. Рассморим многочлен $L_A L_{B_3} \cdots L_{B_d} V$. Это однородный многочлен первой степени, и его производная по всякому направлению равна нулю. Следовательно, сам многочлен тождественно равен нулю. Обратно, если этот многочлен равен нулю, что, очевидно, A лежит в ядре формы $(\cdot,\cdot)$. $\square$

Пространство $\mathbb{R}^d$ вкладывается в пространство аналогичных многогранников. Именно, всякую точку $a \in \mathbb{R}^d$ можно понимать как виртуальный многогранник $(\Delta + a) - \Delta$, аналогичный Δ. Пусть V — многочлен объема на пространстве виртуальных многогранников, аналогичных Δ. Тогда для всякой точки $a \in \mathbb{R}^d$ имеем $L_a V = 0$, поскольку параллельный перенос не меняет объема. Следовательно, всякая точка a лежит в ядре формы $(\cdot,\cdot)$.

Пусть B — некоторый многогранник, аналогичный многограннику Δ. Неравенство Александрова–Фенхеля вытекает из следующей теоремы:

Теорема 3.3 *Имеют место следующие утверждения:*

(i) Ядро формы $(\cdot,\cdot)$ совпадает с $\mathbb{R}^d$,

(ii) Для всякого виртуального многогранника A, такого что $(A,B) = 0$, имеет место неравенство $(A,A) \leqslant 0$.

Доказательство.
Будем вести индукцию по d. Основание индукции ($d = 1$) очевидно. Проделаем индукционный переход. Докажем сначала утверждение (i). Пусть виртуальный многогранник A лежит в ядре формы $(\cdot,\cdot)$. Это означает, что

$$L_A L_{B_2} L_{B_3} \cdots L_{B_d} V = 0. \tag{1}$$

Мы хотим доказать, что A — это просто точка.

Продифференцируем обе части равенства (1) по H_i:

$$L_A L_{B_2} L_{B_3} \cdots L_{B_d} V^i = 0. \tag{2}$$

Многочлен V^i можно рассматривать как многочлен объема в пространстве $\mathcal{L}^i$. Рассмотрим в этом пространстве билинейную форму $(C,D)_i = L_C L_D L_{B_3} \cdots L_{B_d} V^i$. Эта форма выглядит точно также, как и форма $(\cdot,\cdot)$. Поэтому по отношению к форме $(\cdot,\cdot)_i$ можно применять предположение индукции.

Условие (2) говорит о том, что $(A, B_2)_i = 0$. Следовательно, согласно (ii), $(A,A)_i \leqslant 0$. Другими словами,

$$L_A^2 L_{B_3} \cdots L_{B_d} V^i \leqslant 0. \tag{3}$$

Без ограничения общности можно считать, что начало координат находится внутри многогранника B_2. Следовательно, все опорные числа положительны. Умножим неравенство (3) на $H_i(B_2)$ и просуммируем по i. Поскольку $\sum H_i(B_2) V^i = L_{B_2} V$, получим:

$$L_A^2 L_{B_2} L_{B_3} \cdots L_{B_d} V \leqslant 0. \tag{4}$$

Однако в неравенстве (4) реализуется равенство, поскольку A лежит в ядре формы $(\cdot,\cdot)$. Стало быть, равенство реализуется и во всех неравенствах (3). Другими словами, для всякого i имеем $(A,A)_i = 0$. Однако, по предположению индукции, все формы $(\cdot,\cdot)_i$ неположительно определены на ортогональном дополнении к B_2. Следовательно, равенство $(A,A)_i = 0$ означает, что A лежит в ядре формы $(\cdot,\cdot)_i$. Согласно предположению индукции, ядро формы $(\cdot,\cdot)_i$ в пространстве $\mathcal{L}^i$ состоит только из точек. Следовательно, A отображается в точку при естественной проекции $\mathcal{L}\to\mathcal{L}^i$ для каждого i. Отсюда следует, что A — точка. Утверждение (ii) доказано.

Докажем теперь утверждение (i). Для этого будем деформировать многогранники $B_2, B_3\dots, B_d$ таким образом, чтобы получить многогранник B не выходя из класса аналогичных многогранников. Например, можно положить

$$B_2^t = tB + (1-t)B_2, B_3^t = tB + (1-t)B_3, \dots, B_d^t = tB + (1-t)B_d.$$

В ходе описанной деформации мы получим однопараметрическое семейство билинейных форм

$$(C,D)^{(t)} = \mathrm{Vol}(C, D, B_2^t, B_3^t, \dots, B_d^t) = \frac{1}{d!} L_C L_D L_{B_2^t} L_{B_3^t} \cdots L_{B_d^t} V.$$

Обозначим через $\mathcal{P}^t$ ортогональное дополнение к многограннику B_2^t относительно формы $(\cdot,\cdot)^{(t)}$. Форма $(\cdot,\cdot)^{(1)}$ неположительно определена на пространстве $\mathcal{P}^1$. Кроме того, как мы знаем, все формы $(\cdot,\cdot)^{(t)}$ имеют одно и то же ядро. Следовательно, форма $(\cdot,\cdot)^{(0)}$ неположительно определена на пространстве $\mathcal{P}^0$, поскольку при изменении сигнатуры билинейной формы происходит некоторое дополнительное вырождение. Тем самым утверждение (ii) доказано. $\square$

4 Смешанные дискриминанты

В этом разделе мы опишем некоторый аналог неравенства Александрова–Фенхеля. Функция, сопоставляющая каждой квадратной матрице порядка d ее определитель, является однородным многочленом степени d. Следовательно, можно рассмотреть *смешанный определитель* — полилинейную функцию от d матриц, являющуюся поляризацией определителя. Чаще всего рассматривают смешанные определители симметрических матриц, являющихся матрицами некоторых квадратичных форм. Определитель матрицы квадратичной формы называется ее *дискриминантом*, поэтому смешанный определитель нескольких симметрических матриц принято называть *смешанным дискриминантом* этих матриц (или соответствующих квадратичных форм).

Нетрудно написать явную формулу для смешанного определителя. Именно, пусть даны матрицы $A_1,\dots,A_d$. Обозначим столбцы матрицы A_i через $a_i^1,\dots,a_i^d$. Пусть $\det[a_1,\dots,a_d]$ — определитель матрицы, столбцы которой равны $a_1,\dots,a_d$. Смешанный определитель матриц $A_1,\dots,A_d$ равен

$$\det(A_1,\dots,A_d) = \frac{1}{d!}\sum_{\sigma\in S_d} \det[a_1^{\sigma(1)},\dots,a_d^{\sigma(d)}].$$

Суммирование ведется по всем перестановкам σ чисел $1,\dots,d$.

Пусть $B, B_2, B_3, \dots, B_d$ — положительно определенные симметрические матрицы, A — произвольная симметрическая матрица. Тогда имеет место следующий аналог неравенства Александрова–Фенхеля:

$$\det(A, B, B_2, B_3, \dots, B_d)^2 \geqslant \det(A, A, B_2, B_3, \dots, B_d)\det(B, B, B_2, B_3, \dots, B_d).$$

Это *неравенство Александрова на смешанные дискриминанты.* Это неравенство можно доказать тем же самым методом, что и неравенство на смешанные объемы. Индукционный переход основан на том соображении, что производная определителя по некоторому диагональному элементу равна соответствующему минору.

Предложение 4.1 *Пусть λ_1, $\dots$, λ_d — собственные значения симметрической матрицы A. Имеет место равенство*

$$\det(\underbrace{A, A, \dots, A}_{k}, \underbrace{E, E, \dots, E}_{d-k}) = \frac{1}{\binom{d}{k}} s_k(\lambda_1,\dots,\lambda_d),$$

где s_k — элементарный симметрический многочлен степени k.

Доказательство.
Собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ являются корнями характеристического многочлена

$$\det(A - \lambda E) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^{d-k} s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \lambda^{d-k}.$$

С другой стороны, по формуле бинома Ньютона,

$$\det(A - \lambda E) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^{d-k} \binom{d}{k} \lambda^{d-k} \det(\underbrace{A, A, \dots, A}_{k}, \underbrace{E, E, \dots, E}_{d-k}).$$

Сравнивая в обоих выражениях для характеристического многочлена коэффициенты при всех степенях λ, получаем искомую формулу. $\square$

Можно записать следующий частный случай неравенства Александрова:

$$\det(\underbrace{A, A, \dots, A}_{k}, \underbrace{E, E, \dots, E}_{d-k})^2 \geqslant \det(\underbrace{A, A, \dots, A}_{k-1}, \underbrace{E, E, \dots, E}_{d-k+1}) \det(\underbrace{A, A, \dots, A}_{k+1}, \underbrace{E, E, \dots, E}_{d-k-1}), \quad 0 < k < d.$$

В силу предложения 4.1, это неравенство можно переписать как неравенство на собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ матрицы A:

$$\left(\frac{s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_d)}{\binom{d}{k}} \right)^2 \geqslant \frac{s_{k-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)}{\binom{d}{k-1}} \frac{s_{k+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)}{\binom{d}{k+1}}, \quad 0 < k < d.$$