Выпуклые тела и выпуклые многогранники

Лекция 6

Эта лекция посвящена различным следствиям, аналогам и обобщениям неравенста Александрова–Фенхеля и неравенства Александрова на смешанные дискриминанты. Определяются *основные меры*, которые, наряду с объемом и площадью поверхности, являются наиболее важными инвариантными характеристиками выпуклых тел. Неравенство Александрова–Фенхеля позволяет сформулировать различные теоремы типа изопериметрической для основных мер. Далее разбирается квадратичное неравенство на перманенты — важный частный случай одновременно неравенства Александрова–Фенхеля на смешанные объемы и неравенства Александрова на смешанные дискриминанты. Это неравенство на перманенты позволило решить старую *проблему Ван дер Вардена* о перманентах дважды стохастических матриц (Фаликман и Егорычев). Неравенства на *гиперболические формы* являются полезным обобщением неравенства Александрова на смешанные дискриминанты. Гиперболические формы играют важную роль в топологии и теории дифференциальных уравнений с частными производными. Наконец, обсуждаются неравенства, которые обобщают одновременно неравенство Александрова на смешанные дискриминанты и линейный вариант *соотношений Ходжа–Римана*.

1 Основные меры

Кроме объема и площади поверхности, для выпуклого тела определены некоторые другие замечательные меры, инвариантные относительно евклидовых движений.

Определение. *Основной мерой* порядка k выпуклого тела A называется величина

$$W_k(A) = \mathrm{Vol}(\underbrace{A, A, \ldots, A}_{k}, \underbrace{B, B, \ldots, B}_{d-k}),$$

где B — единичный шар. При $k = d$ получаем объем, а при $k = d-1$ — площадь поверхности (с коэффициентом $1/d$).

Необходимо объяснить, в каком смысле функции W_k являются *мерами*. Докажем сначала следующий вспомогательный факт:

Лемма 1.1 *Пусть A, B и C — выпуклые тела, такие что множество $A \cup B$ тоже выпукло. Тогда*

(i) $(A + C) \cup (B + C) = (A \cup B) + C$,

(ii) $(A + C) \cap (B + C) = (A \cap B) + C$.

Доказательство.

Утверждение (i) очевидно. Докажем утверждение (ii). Нетривиальным является только включение $\subseteq$. Пусть $x \in (A + C) \cap (B + C)$. Это означает, что $x = a + c' = b + c''$, где $a \in A$, $b \in B$, $c', c'' \in C$. Поскольку оба множества A и B замкнуты, а их объединение выпукло, отрезок $[a, b]$, лежащий в $A \cup B$, пересекается с $A \cap B$. Следовательно, найдутся коэффициенты $\alpha, \beta \geqslant 0$, такие что $\alpha + \beta = 1$ и $\alpha a + \beta b \in A \cap B$. Но тогда

$$x = \alpha x + \beta x = \alpha(a + c') + \beta(b + c'') = (\alpha a + \beta b) + (\alpha c' + \beta c'') \in (A \cap B) + C.$$

Тем самым включение $(A + C) \cap (B + C) \subseteq (A \cap B) + C$ доказано. $\square$

Напомним, что A_ε означает ε-окрестность множества A. Как мы знаем, $A_\varepsilon = A + \varepsilon B$, где B — единичный шар. Из доказанной леммы вытекает следующее

Следствие 1.2 *Пусть A и B — выпуклые тела, такие что множество $A \cup B$ выпукло. Тогда*

$$(A \cup B)_\varepsilon = A_\varepsilon \cup B_\varepsilon, \quad (A \cap B)_\varepsilon = A_\varepsilon \cap B_\varepsilon.$$

Определение. Функция μ на выпуклых телах называется *мерой*, если для всяких выпуклых тел A и B, таких что $A \cup B$ выпукло, имеет место равенство

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Предложение 1.3 *Функция W_k является мерой на выпуклых телах в $\mathbb{R}^d$.*

Доказательство.
Для доказательства этого утверждения достаточно приравнять коэффициенты при всех степенях ε в разложении обеих частей следующего равенства:

$$\mathrm{Vol}((A \cup B)_\varepsilon) = \mathrm{Vol}(A_\varepsilon) + \mathrm{Vol}(B_\varepsilon) - \mathrm{Vol}((A \cap B)_\varepsilon).$$

Само равенство вытекает из аддитивности объема и следствия 1.2. $\square$

Укажем несколько способов вычисления основных мер.

Обозначим через $\bar\lambda_1(x), \ldots, \bar\lambda_{d-1}(x)$ главные кривизны поверхности тела A в точке $x \in \partial A$. Напомним, что отображение dH_A переводит поверхность тела A в поверхность единичного шара. При этом отображении точке y на единичной сфере соответствует точка x на поверхности тела A, такая что нормаль к ∂A, проведенная в точке x, совпадает с y. Следовательно, функция $\lambda_i = \bar\lambda_i \circ dH_A$ определена на единичной сфере и сопоставляет точке $y \in S^{d-1}$ значение главной кривизны в соответствующей точке x на поверхности тела A.

Предложение 1.4 *Основные меры W_k, $k < d$, выпуклого тела с непустой внутренностью и гладкой границей выражаются по следующей формуле:*

$$W_k(A) = const \cdot \int_{\partial A} s_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}).$$

Доказательство.
Пусть A — выпуклое тело с непустой внутренностью. Объем тела A можно вычислить, приближая A выпуклыми многогранниками. При этом формула для вычисления объема многогранника переходит в пределе в следующую интегральную формулу для вычисления объема тела A:

$$\mathrm{Vol}(A) = \frac{1}{d} \int_{\partial A} H_A \circ G_A vol_{\partial A}.$$

Этот интеграл удобно свести к интегралу по сфере, воспользовавшись гауссовым отображением $G_A : S^{d-1} \to \partial A$. При этом форма $G_A^*(vol_{\partial A})$ равна форме объема сферы, умноженной на $\det(d^2 H_A)$, поскольку $G_A = dH_A$, а дифференциал отображения dH_A совпадает с гессианом функции H_A. Таким образом, получаем:

$$\mathrm{Vol}(A) = \frac{1}{d} \int_{S^{d-1} \subseteq \mathbb{R}^{d*}} H_A \det(d^2 H_A) vol.$$

Последняя формула допускает такую же поляризацию, как и в случае выпуклых многогранников:

$$\mathrm{Vol}(A_1, \ldots, A_d) = \frac{1}{d} \int_{S^{d-1}} H_{A_1} \det(dH_{A_2}, \ldots, dH_{A_d}) vol.$$

Заметим, что если B — единичный шар, то в ограничении на единичную сферу $H_B = 1$, $dH_B = id$. Следовательно, при $k < d$ получаем

$$W_k(A) = \mathrm{Vol}(\underbrace{B, B, \ldots, B}_{n-k}, \underbrace{A, A, \ldots, A}_{k}) = \int_{S^{d-1}} \det(\underbrace{id, id, \ldots, id}_{n-k-1}, \underbrace{d^2H_A, d^2H_A, \ldots, d^2H_A}_{k}).$$

Значение определителя, стоящего под интегралом, пропорционально элементарному симметрическому многочлену степени k от собственных значений квадратичной формы $d^2 H_A$. Собственные значения этой формы, как легко понять, совпадают с λ_i. Тем самым предложение доказано. $\square$

Приведем еще один способ вычисления основных мер. Начнем со случая $k = d - 1$.

Лемма 1.5 *Объем поверхности выпуклого тела A пропорционален среднему значению объема проекции тела A на гиперплоскость, проходящую через начало координат. Более точно, для каждой гиперплоскости H, проходящей через начало координат, обозначим через π_H проекцию тела A на эту гиперплоскость. Тогда*

$$\mathrm{Vol}(\partial A) = const \cdot \int \mathrm{Vol}(\pi_H(A))dH,$$

где интегрирование ведется по пространству всех гиперплоскостей, проходящих через начало координат, то есть по $\mathbb{R}\mathrm{P}^{d-1}$.

Доказательство.
Достаточно проверить эту формулу для выпуклого многогранника. Объем поверхности многогранника складывается из объемов его гиперплоских граней. Рассмотрим одну гиперплоскую грань Γ и посчитаем средний объем проекции этой грани на гиперплоскость, проходящую через начало координат. Пусть H — такая гиперплоскость. Обозначим через h вектор единичной нормали к H, а через g — вектор единичной нормали к Γ. Объем проекции грани Γ на гиперплоскость H равен $\mathrm{Vol}(H)\cos(g,h)$. Чтобы усреднить это выражение по всем гиперплоскостям H, нужно проинтегрировать $\cos(g,h)$ по $h \in S^{d-1}$. Интерграл от косинуса равен двойному объему экваториального сечения (по крайней мере, очевидно, что он не зависит от g). Следовательно, среднее значениие объема проекции грани Γ на гиперплоскость пропорционально объему грани Γ, причем коэффициент пропорциональности не зависит от Γ. Отсюда вытекает утверждение леммы для выпуклого многогранника. Поскольку произвольное выпуклое тело можно приблизить выпуклыми многогранниками, лемма доказана. $\square$

Доказанная лемма допускает обобщение на случай произвольной основной меры W_k.

Лемма 1.6 *Мера W_k, $k < d$, от выпуклого тела A пропорциональна среднему значению меры W_k от проекции тела A на гиперплоскоть:*

$$W_k(A) = const \cdot \int W_k(\pi_H(A))dH.$$

Доказательство.
При $k = d-1$ это утверждение уже доказано. В частности,

$$W_{d-1}(A_\varepsilon) = const \cdot \int W_{d-1}(\pi_H(A_\varepsilon))dH.$$

Обе части этого равенства представляют собой многочлены от ε. Чтобы получить искомое утверждение, достаточно приравнять коэффициенты при всех степенях ε. При этом нужно воспользоваться тем, что $\pi_H(A_\varepsilon) = \pi_H(A)_\varepsilon$. $\square$

Предложение 1.7 *Мера W_k от выпуклого тела A пропорциональна среднему значению объема проекции тела A на k-мерную плоскость, проходящую через начало координат. Другими словами,*

$$W_k(A) = const \cdot \int \mathrm{Vol}(\pi_L(A))dL,$$

где интегрирование ведется по многообразию Грассмана всех k мерных плоскостей в $\mathbb{R}^d$, проходящих через начало координат.

Для доказательства достаточно несколько раз применить лемму 1.6. При этом становится понятно, какую именно меру нужно всять на грассманиане.

Неравенство Александрова–Фенхеля позволяет написать следующую серию квадратичных неравенств на основные меры выпуклых тел:

$$W_k^2(A) \geqslant W_{k-1}(A)W_{k+1}(A).$$

Если A — единичный шар, все эти неравенства обращаются в равенства. Отсюда вытекает много теорем типа изопериметрической.

Задача. Докажите, что $W_k(A)^d \geqslant C\,\mathrm{Vol}(A)^k$ (C — положительный коэффициент, зависящий только от d и k). В частности, среди всех выпуклых тел с фиксированным значением меры W_k ($k < d$) наибольший объем имеет шар.

2 Аналоги неравенства Александрова

Остановимся теперь на некоторых следствиях, аналогах и обобщениях неравенства Александрова на смешанные дискриминанты.

Проблема Ван дер Вардена

Определение. Пусть A — квадратная матрица порядка d. *Перманентом* матрицы A называется выражение

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_d} a_{1\sigma(1)} \dots a_{d\sigma(d)}.$$

Пусть $a_1, \dots, a_d$ — векторы из $\mathbb{R}^d$. Обозначим через $\mathrm{per}(a_1, \dots, a_d)$ перманент матрицы, столбцы которой совпадают со столбцами координат векторов $a_1, \dots, a_d$. Имеет место следующее квадратичное неравенство на перманенты:

$$\mathrm{per}(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_d)^2 \geqslant \mathrm{per}(a_1, a_1, a_3, a_4, \dots, a_d) \cdot \mathrm{per}(a_2, a_2, a_3, a_4, \dots, a_d).$$

Здесь векторы $a_2, \dots, a_d$ имеют положительные координаты (принадлежат положительному октанту), а вектор a_1 произвольный.

Это неравенство является следствием одновременно неравенства Александрова на смешанные дискриминанты и неравенства Александрова–Фенхеля. Действительно, с одной стороны, если обозначить через A_i диагональную матрицу с вектором a_i по диагонали, то

$$\mathrm{per}(a_1, \dots, a_d) = \det(A_1, \dots, A_d).$$

С другой стороны, если обозначить через A'_i координатный параллелепипед, длины ребер которого образуют вектор a_i, то

$$\mathrm{per}(a_1, \dots, a_d) = \mathrm{Vol}(A'_1, \dots, A'_d).$$

Определение. Матрица A называется *дважды стохастической*, если все ее элементы неотрицательны, и сумма всех элементов каждой строки и каждого столбца равна 1. Дважды стохастические матрицы встречаются в теории вероятностей.

Сформулированное выше неравенство на перманенты позволяет доказать следующую оценку, имеющую важное значение в теории вероятностей и комбинаторике.

Теорема 2.1 (Фаликман, Егорычев) *Для всякой дважды стохастической матрицы A имеет место неравенство*

$$\mathrm{per}(A) \geqslant \frac{n!}{n^n}.$$

Равенство достигается только в случае, когда все элементы матрицы A равны $1/n$.

Эта теорема была высказана в качестве гипотезы Ван дер Варденом и стояла в качестве открытой проблемы на протяжении почти 100 лет.

Гиперболические формы

Определение. Пусть P — однородный многочлен степени d на пространстве $\mathbb{R}^n$. Говорят, что многочлен P *гиперболический* в направлении $a \in \mathbb{R}^n$, если для всякого $x \in \mathbb{R}^n$ многочлен

$$\varphi(t) = P(x + at)$$

имеет ровно d вещественных корней с учетом кратностей. Можно показать, что всякая связная компонента множества векторов, в направлении которых многочлен P гиперболичен, представляет собой открытый конус. Такой конус называется *конусом гиперболичности* многочлена P.

Пример. Рассмотрим многочлен $P(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$. Многочлен P гиперболичен в направлении $a = (a_x, a_y, a_z)$ тогда и только тогда, когда $a_z^2 - a_x^2 - a_y^2 > 0$. В качестве конуса гиперболичности можно взять, например, конус, определяемый неравенствами $z^2 - x^2 - y^2 > 0$, $z > 0$.

Лемма 2.2 *Пусть C — конус гиперболичности многочлена P. Тогда, для всякого $a \in C$ конус C содержится в некотором конусе гиперболичности многочлена $L_a P$.*

Идея доказательства.
Очевидно, многочлен $L_a P$ гиперболичен в направлении a (это вытекает из теоремы Ролля). Обозначим через C_a конус гиперболичности многочлена $L_a P$, содержащий вектор a. Докажем, что $C \subseteq C_a$. Пусть $b \in C$. Рассмотрим многочлнен от одной переменной $\varphi(t) = L_a P(x+bt)$. Нужно доказать, что этот многочлен имеет ровно $d-1$ вещественных корней.

Действительно, пусть $P(x+bt) = 0$. Тогда производная $L_a P(x+bt)$ имеет тот же знак, что и $L_b P(x+bt)$ (или обе производные равны нулю). Пусть $t_1, \ldots, t_d$ — все корни многочлена $P(x+bt)$. Предположим для простоты, что все корни простые. Тогда знаки производных $L_b P(x+bt)$ чередуются. Следовательно, чередуются и знаки производных $L_a P(x+bt)$. Отсюда следует (по теореме о промежуточном значении), что многочлен $\varphi(t) = L_a P(x+bt)$ имеет по крайней мере $d-1$ вещественных корней, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 2.3 *Пусть P — многочлен степени 2, гиперболический в направлении b. Тогда для всякого вектора $a \in \mathbb{R}^n$ имеем*

$$(L_a L_b(P))^2 \geqslant L_a^2(P) L_b^2(P).$$

Это просто переформулировка обращенного неравенства Коши–Буняковского для метрики Минковского: P — это метрика Минковского, b — вектор, лежащий внутри светового конуса, $L_a L_b(P) = 2P(a,b)$, $L_a^2(P) = 2P(a)$, $L_b^2(P) = 2P(b)$.

Теперь мы можем сформулировать аналог неравенств Александрова для гиперболических многочленов:

Теорема 2.4 *Пусть P — однородный многочлен степени d в пространстве $\mathbb{R}^n$, C — конус гиперболичности, $a_2, \ldots, a_d$ — векторы из конуса C, a_1 — произвольный вектор. Имеет место следующее неравенство:*

$$(L_{a_1} L_{a_2} L_{a_3} L_{a_4} \cdots L_{a_d}(P))^2 \geqslant L_{a_1} L_{a_1} L_{a_3} L_{a_4} \cdots L_{a_d}(P) \cdot L_{a_2} L_{a_2} L_{a_3} L_{a_4} \cdots L_{a_d}(P).$$

Доказательство.
Последовательно применяя лемму 2.2, получаем, что многочлен $L_{a_3} L_{a_4} \cdots L_{a_d}(P)$ является гиперболическим в направлении a_2. Теперь осталось только воспользоваться леммой 2.3. $\square$

Предложение 2.5 *Многочлен* det *(дискриминант), определенный на пространстве всех квадратичных форм, является гиперболическим по направлению любой положительно определенной квадратичной формы.*

Доказательство.
Действительно, пусть A — положительно определенная квадратичная форма. Многочлен $\varphi(t) = \det(X + tA)$ совпадает с характеристическим многочленом квадратичной формы X относительно положительно определенной формы A. Как известно, все корни такого характеристического многочлена (собственные значения X по отношению к A) вещественны. $\square$

Таким образом, в качестве формального следствия теоремы 2.4 можно получить неравенство Александрова на смешанные дискриминанты. Напротив, неравенство Александрова–Фенхеля из теоремы 2.4 не вытекает: многочлен объема не является гиперболическим.

Линейный вариант смешанных соотношений Ходжа–Римана

Рассмотрим пространство Λ комплекснозначных вещественно-полилинейных функционалов на $\mathbb{C}^d$ (то есть дифференциальных форм с постоянными коэффициентами). Пространство Λ допускает естественную биградуировку:

$$\Lambda = \bigoplus_{p,q \leqslant d} \Lambda^{p,q}.$$

Подпространство $\Lambda^{p,q}$ порождается произведениями p линейных и q антилинейных функционалов. Элементы пространства $\Lambda^{p,q}$ называются формами типа (бистепени) (p,q).

Определение. Форма ω типа (1,1) называется *положительной*, если для каждого ненулевого вектора $\xi \in \mathbb{C}^d$ выполняется неравенство

$$\omega(\xi, i\xi) > 0.$$

Задача. Докажите, что 2-форма ω имеет бистепень (1,1) тогда и только тогда, когда ω инвариантна относительно умножения на i, то есть для любых векторов $\xi, \eta \in \mathbb{C}^d$ выполнено равенство

$$\omega(i\xi, i\eta) = \omega(\xi, \eta).$$

Задача. Докажите, что если (1,1)-формы ω_1 и ω_2 совпадают в ограничении на любые комплексные прямые, то есть

$$(\forall \xi \in \mathbb{C}^d) \quad \omega_1(\xi, i\xi) = \omega_2(\xi, i\xi),$$

то $\omega_1 = \omega_2$.

Задача. Пусть ω — положительная (1,1)-форма. Докажите, что она принимает только действительные значения.

Задача. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

- ω — положительная (1,1)-форма.
- В ограничении на любую комплексную прямую форма ω дает форму площади с положительным коэффициентом.
- Существует положительно определенная эрмитова форма H, такая что $\omega = -\operatorname{Im} H$.

Положительная (1,1)-форма записывается в координатах как

$$\omega = \frac{i}{2} \sum a_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

где (a_{jk}) — положительно определенная симметрическая матрица с вещественными коэффициентами. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между положительными (1,1)-формами и положительно определенными симметрическими матрицами. Вообще, всякой симметрической матрице соответствует некоторая (1,1)-форма.

Пусть Ω — форма старшей степени (степени $2d$). Тогда Ω пропорциональна форме объема. Коэффициент пропорциональности обозначим через $[\Omega]$. Если A — симметрическая матрица, а ω — соответствующая (1,1)-форма, то

$$\det(A) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} [\omega \wedge \cdots \wedge \omega].$$

Отсюда видно, что если $A_1, \ldots, A_d$ — симметрические матрицы, а $\omega_1, \ldots, \omega_d$ — соответствующие (1,1)-формы, то

$$\det(A_1, \ldots, A_d) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} [\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_d].$$

Сформулируем некоторое обобщение неравенства Александрова на смешанные дискриминанты. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_{n-p-q}, \omega_{n-p-q+1}$ — положительные (1,1)-формы. Положим $\Omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-p-q}$. Определим *смешанную форму Ходжа–Римана* на пространстве $\Lambda^{p,q}$ следующим образом:

$$Q(\alpha, \beta) = i^{p-q} (-1)^{\frac{(n-p-q)(n-p-q)}{2}} [\alpha \wedge \beta \wedge \Omega].$$

Это эрмитова форма на пространстве $\Lambda^{p,q}$. Обозначим через $P^{p,q}$ *смешанное примитивное подпространство* пространства $\Lambda^{p,q}$, состоящее из всех форм $\alpha \in \Lambda^{p,q}$, таких что

$$\alpha \wedge \Omega \wedge \omega_{n-p-q+1} = 0.$$

Сформулируем *смешанные билинейные соотношения Ходжа–Римана* для $\mathbb{C}^d$:

Теорема 2.6 *Смешанная форма Ходжа–Римана положительно определена на смешанном примитивном подпространстве.*

При $p = q = 1$ это неравенство Александрова на смешанные дискриминанты. В случае, когда все формы ω_i совпадают, это линейный вариант *соотношений Ходжа–Римана*, играющих важную роль в геометрии кэлеровых многообразий.