Выпуклые тела и выпуклые многогранники

Лекция 7

1 f-вектор

Одной из самых важных комбинаторных характеристик многогранника является его f-вектор.

Определение. Пусть Δ — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$. *f-вектором* многогранника Δ называется набор целых чисел $(f_0, \ldots, f_d)$, в котором f_i — число граней размерности i. В частности, f_0 — это число вершин, f_1 — число ребер, а число f_d всегда равно 1.

Не всякий набор целых чисел $f_0, \ldots, f_{d-1}, f_d = 1$ является f-вектором некоторого выпуклого многогранника. Например, компоненты f-вектора выпуклого многогранника всегда удовлетворяют *теореме Эйлера*:

$$\sum (-1)^i f_i = 1.$$

Теорема Эйлера для выпуклых многогранников вытекает из того, что эйлерова характеристика шара равна 1 (а любой выпуклый многогранник гомеоморфен шару). Разбиение многогранника на открытые грани является клеточным разбиением. По этому разбиению можно считать эйлерову характеристику.

Никаких других линейных соотношений на компоненты f-вектора произвольного выпуклого многогранника нет. Однако есть соотношения типа неравенств. Например,

Теорема 1.1 (Штейниц) *Числа f_0, f_1, f_2 являются компонентами f-вектора некоторого трехмерного выпуклого многогранника тогда и только тогда, когда они удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2, \quad 4 \leqslant f_0 \leqslant \frac{2}{3} f_1, \quad 4 \leqslant f_2 \leqslant \frac{2}{3} f_1.$$

Соотношение $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ — это теорема Эйлера. Если $f_0 < 4$, многогранник не может быть трехмерным (любые три точки в трехмерном пространстве аффинно зависимы). Неравенство $f_0 \leqslant 2/3 f_1$ можно получить, заметив, что на каждом ребре по 2 вершины, а в каждой вершине сходится не менее трех ребер. Неравенства $4 \leqslant f_2 \leqslant 2/3 f_1$ получаются аналогично. Тем самым необходимость условий Штейница доказана. Достаточность доказывается гораздо сложнее.

В размерности 4 задача описания f-векторов произвольных выпуклых многогранников остается открытой. Еще сложнее задача описания всех возможных *комбинаторных типов*. Говорят, что два многогранника имеют один и тот же *комбинаторный тип*, если между их гранями можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором пересечения переходят в пересечения. Задача перечисления комбинаторных типов не решена даже в трехмерном случае.

2 Простые и симплициальные многогранники

Напомним, что d-мерный многогранник называется *простым*, если в каждой его вершине сходятся ровно d гиперплоских граней. Простые многогранники устойчивы относительно малого шевеления гиперплоских граней. Более того, если все гиперплоские грани произвольного многогранника слегка пошевелить, получится простой многогранник. Таким образом, простые многогранники — это многогранники общего положения относительно гиперплоских граней.

Определение. Многогранник называется *симплициальным*, если все его собственные грани — симплексы. Нетрудно проверить, что многогранник, двойственный к простому, является симплициальным, и наоборот. Симплициальные многогранники устойчивы относительно малого шевеления вершин. Более того, если слегка пошевелить все вершины произвольного многогранника, то получится симплициальный многогранник. Таким образом, симплициальные многогранники — это многогранники общего положения относительно вершин. Нетрудно проверить, что многогранники "совсем общего положения", то есть и простые, и симплициальные одновременно — это только симплексы.

В силу двойственности, комбинаторика простых многогранников и комбинаторика симплициальных многогранников — это одна и та же теория. Всякое утверждение о комбинаторике простых многогранников можно переписать в виде утверждения о комбинаторике симплициальных многогранников, и наоборот. Однако в некоторых случаях бывает удобней работать с простыми многогранниками, а в некоторых случаях — с симплициальными.

3 Соотношения Дена–Соммервиля

Пусть Δ — простой d-мерный многогранник в $\mathbb{R}^d$.

Определение. F-*полиномом* многогранника Δ называется производящая функция числа граней, то есть полином

$$F(t) = \sum_{i=0}^{d} f_i t^i.$$

Во многих случаях бывает удобней рассматривать другой полином, по которому F-полином восстанавливается однозначно:

$$H(t) = F(t-1) = \sum_{k=0}^{d} h_k t^k, \quad h_k = \sum_{i \geqslant k} f_i (-1)^{i-k} \binom{i}{k}.$$

Определение. Числа $h_0, \ldots, h_d$ образуют h-*вектор* многогранника Δ (от слова "homology" — гомология). Задание h-вектора эквивалентно заданию f-вектора. Именно, f-вектор простого многогранника выражается через h-вектор по формуле

$$F(t) = H(t+1), \quad f_i = \sum_{k \geqslant i} h_k \binom{k}{i}.$$

Пример. Пусть Δ — симплекс размерности d. Тогда

$$f_i = \binom{d+1}{i+1}, \quad i \leqslant d.$$

Действительно, всякая i-мерная грань симплекса содержит ровно $i+1$ вершину. С другой стороны, выпуклая оболочка всякого набора из $i+1$ вершины многогранника Δ является гранью размерности i.

Таким образом, F-полином симплекса равен

$$F(t) = (d+1) + \binom{d+1}{2} t + \binom{d+1}{3} t^3 + \cdots + t^d = \frac{(t+1)^{d+1} - 1}{t}.$$

Отсюда получаем следующее выражение для H-полинома симплекса:

$$H(t) = F(t-1) = \frac{t^{d+1} - 1}{t-1} = 1 + t + \cdots + t^{d-1} + t^d.$$

Следовательно, все компоненты h-вектора симплекса равны единице.

Пример. Пусть Δ_1 и Δ_2 — выпуклые многогранники размерностей m и $d-m$ соответственно. Выразим h-вектор прямого произведения $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ через h-векторы многогранников Δ_1 и Δ_2. Заметим, что всякая k-мерная грань многогранника Δ является прямым произведением $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ грани Γ_1 многогранника Δ_1 и грани Γ_2 многогранника Δ_2, таких что $\dim(\Gamma_1) + \dim(\Gamma_2) = k$. Отсюда получаем:

$$f_k(\Delta_1 \times \Delta_2) = \sum_{i=0}^{k} f_i(\Delta_1) f_{k-i}(\Delta_2).$$

Другими словами, справедливо следующее соотношение на F-полиномы:

$$F_{\Delta_1 \times \Delta_2}(t) = F_{\Delta_1}(t) F_{\Delta_2}(t).$$

Но тогда точно таким же соотношением связаны H-полиномы:

$$H_{\Delta_1 \times \Delta_2}(t) = H_{\Delta_1}(t) H_{\Delta_2}(t).$$

Пример. Теперь мы можем посчитать h-вектор куба. F-полином отрезка I имеет вид $F_I(t) = 2 + t$, поскольку отрезок имеет 2 вершины и одно ребро. Следовательно, $H_I(t) = 1 + t$. Поскольку куб I^d есть прямое произведение d координатных отрезков, H-полином куба имеет вид

$$H_{I^d}(t) = (1 + t)^d.$$

Следовательно, h-вектор куба состоит из биномиальных коэффициентов: $h_k = \binom{d}{k}$.

В то время как для произвольных выпуклых многогранников единственным линейным соотношением на f-вектор служит теорема Эйлера, для простых (или симплициальных) многогранников имеется уже примерно $d/2$ линейных соотношений. Например, нетрудно получить соотношение между количеством ребер и количеством вершин простого многогранника: $f_1 = \frac{d \cdot f_0}{2}$. Все линейные соотношения нашел и доказал Соммервиль в 1927 году (некоторые частные случаи были ранее разобраны Деном). Эти соотношения получили название *соотношений Дена–Соммервиля*:

Теорема 3.1 *Для всякого простого d-мерного многогранника*

$$h_k = h_{n-k}, \quad h_0 = h_d = 1.$$

Другими словами, h-вектор симметричен относительно середины.

Замечание. Доказательство соотношений Дена–Соммервиля, приведенное ниже, является аналогом рассуждения из теории Морса, доказывающего двойственность Пуанкаре. На самом деле, имеется непосредственная связь между соотношениями Дена–Соммервиля и двойственностью Пуанкаре в гомологиях некоторого компактного многообразия.

Пусть Δ — простой выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим произвольную линейную функцию l на пространстве $\mathbb{R}^d$, не постоянную ни на какой грани многогранника Δ положительной размерности. Такую функцию мы будем называть *общей линейной функцией* на многограннике. Вершина многогранника индекса m (относительно общей линейной функции l) — это такая вершина, из которой ровно m ребер идут вниз (то есть функция l, ограниченная на эти ребра, убывает). Остальные ребра идут вверх.

Обозначим через $B(l, m)$ число вершин индекса m многогранника Δ относительно общей линейной функции l.

Предложение 3.2 *Число $B(l, m)$ не зависит от конкретного выбора общей линейной функции l и явно выражается через компоненты f-вектора многогранника. Именно,*

$$B(l, m) = h_m.$$

Доказательство.
Для доказательства этого утверждения заметим, что вершина индекса m есть точка максимума нашей линейной функции, ограниченной на какую-то грань размерности $\leqslant m$. Посчитаем теперь число f_i следующим образом. Каждой i-мерной грани многогранника Δ сопоставим вершину, в которой ограничение функции l на рассматриваемую грань принимает наибольшее значение. Получим вершину индекса $m \geqslant i$. Однако из каждой такой вершины выходит вниз ровно $\binom{m}{i}$ i-мерных граней. Следовательно, для того чтобы посчитать число граней размерности i в многограннике Δ, нужно посчитать все вершины индекса $\geqslant i$, причем вершину индекса m следует посчитать $\binom{m}{i}$ раз. Таким образом,

$$f_i = \sum_{m \geqslant i} B(l, m) \binom{m}{i}.$$

Следовательно, по определению h-вектора, $B(l,m) = h_m$. Отсюда видно, что число $B(l,m)$ не зависит от выбора линейной функции l. $\square$

Сменим знак у линейной функции l. С одной стороны, согласно доказанному предложению, число $B(l,m)$ не изменится. С другой стороны, все точки индекса m превратятся в точки индекса $d-m$. Поэтому

$$h_m = B(l,m) = B(-l, d-m) = h_{d-m}.$$

Соотношения Дена–Соммервилля доказаны. $\square$

4 Условия Макмюллена

Для случая простых многогранников известны необходимые и достаточные условия на f-вектор (или, что эквивалентно, на h-вектор). Эти условия были высказаны в качестве гипотезы Макмюлленом в 1970 году. Первое доказательство (использующее алгебраическую геометрию) дал Стенли в 1980. В настоящее время существуют геометрические доказательства условий Макмюллена (использующие только элементарную комбинаторику и геометрию выпуклых многогранников). Основные идеи одного из доказательств будут приведены ниже.

Прежде чем сформулировать условия Макмюллена, дадим следующее определение:

Определение. Пусть a и k — натуральные числа. *Каноническим k-представлением* числа a называется разложение

$$a = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_i}{i}, \quad a_k > a_{k-1} > \ldots > a_i \geqslant i \geqslant 1.$$

Лемма 4.1 *Для фиксированных a и k такое разложение существует и единственно.*

Доказательство.
Построим каноническое k-представление числа a. Для этого возьмем самое большое целое число a_k, такое что $\binom{a_k}{k} \leqslant a$. Если реализуется равенство, то k-представление построено. Предположим, что $\binom{a_k}{k} < a$. Тогда рассмотрим самое большое целое число a_{k-1}, такое что $\binom{a_{k-1}}{k-1} \leqslant a - \binom{a_k}{k}$. Докажем, что $a_{k-1} < a_k$. Действительно, предполагая противное ($a_{k-1} \geqslant a_k$), получаем:

$$a \geqslant \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} \geqslant \binom{a_k}{k} + \binom{a_k}{k-1} = \binom{a_k+1}{k}.$$

Но это противоречит нашему выбору числа a_k. Итерируя описанный процесс, получаем каноническое k-представление.

Доказательство единственности остается в качестве упражнения. $\square$

Определение. Пусть число a задано своим каноническим k-представлением

$$a = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_i}{i}, \quad a_k > a_{k-1} > \ldots > a_i \geqslant i \geqslant 1.$$

Определим оператор ∂_k следующим образом:

$$\partial_k(a) = \binom{a_k+1}{k+1} + \binom{a_k}{k} + \dots + \binom{a_i+1}{i+1}.$$

Теперь мы можем, наконец, сформулировать условия Макмюллена — условия на набор целых чисел $h_0, \ldots, h_d$, необходимые и достаточные для того, чтобы этот набор являлся h-вектором некоторого простого выпуклого многогранника:

- h-вектор удовлетворяет соотношениям Дена–Соммервиля: $h_k = h_{d-k}$, $h_0 = h_d = 1$.
- h-вектор удовлетворяет *условию унимодальности*, то есть компоненты h-вектора до середины размерности (то есть до $d/2$) возрастают, а потом убывают:

$$h_i \leqslant h_{i+1}, \quad i < d/2.$$

- Положим $g_i = h_i - h_{i-1}$ при $0 < i \leqslant d/2$, $g_0 = 1$ и $g_i = 0$ при $i > d/2$ (набор чисел g_i называется *g-вектором* многогранника). Тогда

$$g_{k+1} \leqslant \partial_k(g_k).$$

Последнее условие связано с *комбинаторной теоремой Маколея*:

Теорема 4.2 (Маколей) *Пусть B — гадуированная коммутативная алгебра, порожденная элементами первой степени (то есть фактор кольца многочленов от нескольких переменных по некоторому однородному идеалу). Тогда размерности однородных компонент этой алгебры удовлетворяют следующим неравенствам*

$$\dim B_{k+1} \leqslant \partial_k(\dim B_k).$$

Обратно, если целые числа g_k удовлетворяют неравенствам $g_{k+1} \leqslant \partial_k(g_k)$, то найдется алгебра B описанного вида, такая что $g_k = \dim B_k$.

Таким образом, последняя часть условий Макмюллена говорит о том, что найдется некоторая коммутативная градуированная алгебра B, порожденная элементами первой степени, такая что $g_k = \dim B_k$.

5 Алгебра многогранника

По каждому простому выпуклому многограннику можно построить некоторую коммутативную градуированную алгебру A, такую что $\dim A_k = h_k$. В алгебре A имеет место аналог разложения Лефшеца, откуда и вытекают условия Макмюллена. В этом разделе мы определим алгебру A и опишем некоторые ее свойства.

По каждому однородному многочлену можно построить некоторую коммутативную градуированную алгебру. Нас будет интересовать алгебра, построенная по многочлену объема.

Пусть V — произвольный однородный многочлен степени d на конечномерном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим через Diff алгебру всех дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $(x_1, \dots, x_n)$ — некоторая система координат на пространстве $\mathbb{R}^n$, то дифференциальные операторы с постоянными коэффициетами представляют собой многочлены от $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Поэтому алгебра Diff изоморфна алгебре многочленов от n переменных.

Алгебра Diff имеет естественную градуировку:

$$\mathrm{Diff} = \bigoplus_{k \in \mathrm{N}} \mathrm{Diff}_k.$$

Однородная компонента Diff_k состоит из дифференциальных операторов степени k. Определим идеал

$$I = \{\alpha \in \mathrm{Diff} | \alpha V = 0\}.$$

Нетрудно проверить, что идеал I однородный.

Определение. *Алгеброй многочлена V* называется факторалгебра $A = \mathrm{Diff}/I$. Эта алгебра заимствует градуировку из алгебры дифференциальных операторов:

$$A = \bigoplus_{k=0}^{d} A_k.$$

При $k > d$ все компоненты $A_k = 0$, поскольку однородный дифференциальный оператор степени $k > d$, примененный к многочлену степени d, дает 0.

Пусть $\alpha \in \mathrm{Diff}$ — дифференциальный оператор. Обозначим через $[\alpha]$ класс оператора α в факторалгебре A.

Предложение 5.1 *Формула $([\alpha], [\beta]) = \alpha\beta V$ определяет невырожденное спаривание $A_k \otimes A_{d-k} \to \mathbb{R}$.*

Доказательство.
Корректность определения очевидна. Докажем невырожденность: для каждого ненулевого $\beta \in A_{d-k}$ найдется элемент $\alpha \in A_k$, такой что $(\alpha, \beta) \neq 0$. Заметим, что βV представляет собой ненулевой однородный многочлен степени k. Поэтому найдется оператор α степени k, не обращающий в 0 многочлен βV, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 5.2 *Имеет место следующее соотношение двойственности:* $\dim A_k = \dim A_{d-k}$.

Определение. Пусть Δ — простой выпуклый многогранник. *Алгеброй многогранника* Δ называется алгебра, построенная по многочлену объема на пространстве виртуальных многогранников, аналогичных Δ.

Ниже мы докажем следующую теорему:

Теорема 5.3 *Размерности однородных компонент алгебры простого выпуклого многогранника равны* $\dim A_k = h_k$.

На пространстве аналогичных многогранников введены координаты H_i — опорные числа. Оператор $\frac{\partial}{\partial H_i}$ дифференцирования по опорному числу H_i обозначим для краткости через ∂_i.

Пусть F — некоторая грань многогранника Δ. Рассмотрим многогранник Δ', аналогичный многограннику Δ. Пусть F' — грань многогранника Δ', соответствующая грани F. Функция, сопоставляющая многограннику Δ' объем соответствующей грани F', продолжается до некоторого многочлена V_F на пространстве аналогичных многогранников. Многочлен V_F будем называть *многочленом объема грани* F.

Предложение 5.4 *Пусть* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ *— различные гиперплоские грани простого многогранника* Δ. *Тогда*

- *если* $\Gamma_1 \cap \cdots \cap \Gamma_k = \varnothing$, *то* $\partial_1 \cdots \partial_k V = 0$,
- *если* $F = \Gamma_1 \cap \cdots \cap \Gamma_k$ *— грань многогранника* P *коразмерности* k, *то* $\partial_1 \cdots \partial_k V = C V_F$, *где* C *— постоянный положительный коэффициент.*

Доказательство.
Будем вести индукцию по k. При $k = 1$ теорема уже доказана: как мы знаем, $\partial_1 V = V_{\Gamma_1}$. Предположим, что теорема доказана для некоторого k. Рассмотрим $k+1$ гиперплоскую грань $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k, \Gamma_{k+1}$. Если $\Gamma_1 \cap \cdots \cap \Gamma_k = \varnothing$, то и подавно $\Gamma_1 \cap \cdots \cap \Gamma_k \cap \Gamma_{k+1} = \varnothing$. Далее, согласно предположению индукции, $\partial_1 \cdots \partial_k V = 0$. Но тогда и подавно $\partial_1 \cdots \partial_k \partial_{k+1} V = 0$. Таким образом, можно ограничиться случаем $\Gamma_1 \cap \cdots \cap \Gamma_k = F \neq \varnothing$. Предположим сначала, что $\Gamma_1 \cap \cdots \cap \Gamma_k \cap \Gamma_{k+1} = \varnothing$. Это означает, что гиперплоская грань Γ_{k+1} не имеет общих точек с гранью F. Следовательно, при малом смещении гиперплоской грани Γ_{k+1} объем F не меняется. Таким образом, $\partial_{k+1} V_F = 0$. Отсюда и из предположения индукции вытекает, что $\partial_1 \cdots \partial_k \partial_{k+1} V = 0$.

Теперь предположим, что $\Gamma_1 \cap \cdots \cap \Gamma_k \cap \Gamma_{k+1} = F \cap \Gamma_{k+1} \neq \varnothing$. При движении гиперплоской грани Γ_{k+1} в положительном направлении гиперплоская грань $F \cap \Gamma_{k+1}$ многогранника F движется в плоскости многогранника F тоже в положительном направлении (но, быть может, с другой скоростью). Остальные гиперплоские грани многогранника F остаются на месте. Таким образом, производная $\partial_{k+1} V_F$ пропорциональна с положительным коэффициентом многочлену $V_{F \cap \Gamma_{k+1}}$. Для завершения доказательства теоремы осталось только воспользоваться предположением индукции. $\square$

Опишем структуру идеала I, состоящего из всех дифференциальных операторов, аннулирующих многочлен объема.

Теорема 5.5 *Идеал* I *порождается операторами следующего вида:*

- L_a, *где* a *— точка,*
- $\partial_1 \ldots, \partial_k$, *где* $\Gamma_1 \cap \cdots \cap \Gamma_k = \varnothing$.

Обозначим через J идеал, натянутый на все операторы, указанные в теореме. Очевидно, $J \subseteq I$. Мы хотим доказать, что $J = I$.

Определение. Пусть $F = \Gamma_1 \cap \cdots \cap \Gamma_k$ — некоторая грань многогранника Δ. *Мономом грани* F назовем дифференциальный моном $\partial_F = \partial_1 \cdots \partial_k$. Как было доказано выше, в применении к многочлену объема оператор ∂_F дает многочлен объема грани F с положительным коэффициентом.

Лемма 5.6 *Всякий дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами выражается по модулю идеала J через дифференциальные мономы, соответствующие граням многогранника Δ.*

Доказательство.
Достаточно проверить это утверждение только для дифференциального монома. Пусть моном не содержит кратных дифференцирований по одной и той же переменной. Тогда он либо принадлежит идеалу J, либо соответствует некоторой грани многогранника Δ (это вытекает из предложения 5.4).

Допустим, что моном содержит кратные дифференцирования:

$$\alpha = \partial_1^{k_1} \cdots \partial_s^{k_s}, \quad k_1, \ldots, k_s > 0.$$

Назовем *кратностью* монома α число $(k_1-1)+\cdots+(k_s-1)$. Если кратность монома больше нуля (то есть моном содержит кратные дифференцирования), то его можно свести к линейной комбинации мономов меньшей кратности по модулю идеала J.

В самом деле, пусть, например, $k_1 > 1$. Если $\alpha \notin J$, то $\Gamma_2 \cap \cdots \cap \Gamma_s$ — грань положительной размерности. Следовательно, найдутся две различные вершины $O, X \in \Gamma_2 \cap \cdots \cap \Gamma_s$, такие что $(\xi_1, \overrightarrow{OX}) \neq 0$, где ξ_1 — внешняя нормаль к грани Γ_1.

Примем точку O за начало координат. Пусть $H_i = (\xi_i, \overrightarrow{OX})$ — опорные числа точки X. Заметим, что поскольку отрезок OX принадлежит гиперплоским граням $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$, то $H_2 = \cdots = H_s = 0$.

Рассмотрим дифференциальный оператор $L = \sum_{i=1}^n H_i \partial_i$, соответствующий точке X. Из соотношения $L \equiv 0 \pmod J$ можно выразить оператор ∂_1:

$$\partial_1 \equiv \frac{1}{H_1} \sum_{i \neq 1} (-H_i)\partial_i = L_i \pmod J.$$

Заметим, что операторы $\partial_1, \ldots, \partial_s$ входят в правую часть с нулевыми коэффициентами. Следовательно, оператор

$$L_i \partial_1^{k_1-1} \partial_2^{k_2} \cdots \partial_s^{k_s}$$

равен оператору α по модулю идеала J, но вместе с тем представляется линейной комбинацией операторов меньшей кратности.

Таким образом, любой оператор совпадает по модулю идеала J с некоторой линейной комбинацией дифференциальных мономов, соответствующих граням многогранника Δ, что и требовалось доказать. □

Доказательство теорем 5.3 и 5.5 основано на "теории Морса для многогранников". Зафиксируем некоторую общую линейную функцию l на многограннике Δ.

Определение. Грань многогранника Δ размерности k называется (нижней) *сепаратрисой*, если максимум функции l в ограничении на эту грань достигается в вершине индекса k. Другими словами, сепаратриса — это грань, "натянутая" на все ребра, идущие вниз из вершины индекса k. Дифференциальный моном, соответствующий сепаратрисе, назовем *сепаратрисным мономом*.

Лемма 5.7 *Компонента A_k порождается сепаратрисными мономами. Более того, всякий дифференциальный оператор из* Diff *можно свести к линейной комбинации сепаратрисных мономов по модулю идеала J.*

Доказательство.
Определим отношение порядка на гранях многогранника Δ. Скажем, что *одна грань меньше другой*, если максимальное значение функции l на первой грани меньше максимального значения функции l на второй грани.

Докажем, что если грань F не является сепаратрисой, то соответствующий оператор ∂_F может быть выражен через мономы, соответствующие меньшим граням, по модулю идеала J.

Обозначим через O максимальную вершину грани F. Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_d$ — гиперплоские грани, содержащие точку O, G — нижняя сепаратриса, выходящая из вершины O. Тогда F является гранью G. Среди гиперплоских граней $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_d$ обязательно найдется хотя бы одна грань, содержащая F, но не содержащая G. Можно предполагать без ограничения общности, что эта грань — Γ_1. В этом случае $\partial_F = \partial_G \partial \partial_1$, где ∂ — некоторый дифференциальный моном.

Рассмотрим ребро $OX = \Gamma_2 \cap \dots \cap \Gamma_d$. Примем точку O за начало координат. Пусть $H_i = (\xi_i, \overrightarrow{OX})$ — опорные числа точки X. Заметим, что поскольку отрезок OX принадлежит гиперплоским граням $\Gamma_2, \dots, \Gamma_d$, то $H_2 = \dots = H_d = 0$.

Рассмотрим дифференциальный оператор $L = \sum_{i=1}^n H_i \partial_i$, соответствующий точке X. Из соотношения $L = 0 \pmod J$ можно выразить оператор ∂_1:

$$\partial_1 \equiv \frac{1}{H_{i_1}} \sum_{i \neq i_1} (-H_i)\partial_i = L_i \pmod J.$$

Заметим, что операторы $\partial_1, \dots, \partial_d$ входят в правую часть с нулевыми коэффициентами. Оператор $\partial_G \partial L_i$ равен ∂_F по модулю идеала J. С другой стороны, в его разложении присутствуют дифференциальные мономы, соответствующие только тем граням G, которые не содержат вершины O. Но все такие грани меньше F. Таким образом, мы выразили оператор ∂_F через меньшие грани по модулю идеала J. $\square$

Лемма 5.8 *Сепаратрисные мономы линейно независимы в алгебре A.*

Доказательство.
Рассмотрим линейную комбинацию (с ненулевыми коэффициентами) сепаратрисных мономов:

$$\alpha = \lambda_1 \partial_{F_1} + \dots + \lambda_s \partial_{F_s}.$$

Можно считать, что все мономы имеют одну и ту же степень. Таким образом, сепаратрисы $F_1, \dots, F_s$ имеют одинаковую размерность. Предположим, что $\alpha = 0$ в алгебре многогранника. Рассмотрим максимальную сепаратрису, фигурирующую в линейной комбинации α. Можно считать, что это F_1. Пусть G_1 — "верхняя сепаратриса", соответствующая F_1. Грань G_1 натянута на все ребра, идущие вверх из максимальной вершины грани F_1.

Умножим линейную комбинацию α на дифференциальный моном ∂_{G_1}. Согласно предложению 5.4, все произведения вида $\partial_{G_1}\partial_{F_2}$, ..., $\partial_{G_1}\partial_{F_s}$ равны нулю в алгебре многогранника. Дело в том, что в линейной комбинации α все мономы, кроме первого, соответствуют граням многогранника Δ, лежащим целиком ниже грани G_1. Таким образом, $G_1 \cap F_2 = \dots = G_1 \cap F_s = \varnothing$. Напротив, произведение $\partial_{G_1}\partial_{F_1}$ отлично от нуля. Следовательно, из соотношения $\partial_{G_1}\alpha = 0$ получаем $\lambda_1 = 0$. Противоречие с тем, что все коэффициенты ненулевые. $\square$

Заметим теперь, что из доказанных лемм вытекают теоремы 5.3 и 5.5. Согласно леммам 5.7 и 5.8, базис в векторном пространстве A_k составляют сепаратрисные мономы. Но сепаратрисных мономов размерности k столько же, сколько вершин индекса k, то есть h_k. Отсюда вытекает теорема 5.3.

С другой стороны, согласно лемме 5.7, алгебра Diff/J порождается как векторное пространство тем же набором векторов, что и A. Однако, поскольку A — это факторалгебра алгебры Diff/J (так как $J \subseteq I$), на самом деле $A = \mathrm{Diff}/J$. Следовательно, $J = I$, что и доказывает теорему 5.5.

6 Аналог разложения Лефшеца

Неравенство Александрова–Фенхеля позволяет доказать частный случай условия унимодальности: $h_1 \leqslant h_2$. Зафиксируем простой выпуклый многогранник Δ и обозначим через A алгебру этого многогранника.

Лемма 6.1 *Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_{d-2}$ — многогранники, аналогичные многограннику Δ. Тогда оператор умножения на $L_{\Delta_1} \cdots L_{\Delta_{d-2}}$ осуществляет изоморфизм между A_1 и A_{d-1}.*

Доказательство.
При доказательстве неравенства Александрова–Фенхеля мы выяснили, что ядро формы Александрова–Фенхеля

$$(A, B) = L_A L_B L_{\Delta_1} \cdots L_{\Delta_{d-2}}(V)$$

совпадает с $\mathbb{R}^d$ (то есть с множеством операторов вида L_a, где a — точка). Однако $A_1 = \mathrm{Diff}_1/\mathbb{R}^d$. Следовательно, форма $(\cdot,\cdot)$ невырождена на A_1. Но отсюда вытекает, что для всякого $\alpha \in A_1$ $\alpha L_{\Delta_1} \cdots L_{\Delta_{d-2}}(V) \neq 0$, то есть оператор умножения на $L_{\Delta_1} \cdots L_{\Delta_{d-2}}$ является изоморфизмом. $\square$

Следствие 6.2 *Для всякого простого многогранника $h_1 \leqslant h_k$ при $1 < k < d-1$.*

Доказательство.
Действительно, из доказанной леммы вытекает, что оператор $L_{\Delta_1} \cdots L_{\Delta_{k-1}}$ осуществляет вложение пространства A_1 в пространство A_k. $\square$

Общее условие унимодальности вытекает из следующего аналога сильной теоремы Лефшеца:

Теорема 6.3 *Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-2k}$ — многогранники, аналогичные многограннику Δ. Тогда оператор умножения на $L_{\Delta_1} \cdots L_{\Delta_{d-2k}}$ осуществляет изоморфизм между пространствами A_k и A_{d-k}.*

Отсюда же вытекает и последнее условие Макмюллена: достаточно рассмотреть факторалгебру B алгебры A по главному идеалу, порожденному L_Δ, и показать, что $g_k = \dim B_k$.

Для доказательства теоремы 6.3 требуется некоторое обобщение формы Александрова–Фенхеля. Сейчас мы опишем это обобщение.

Определение. Обозначим $\Omega = L_{\Delta_1} \cdots L_{\Delta_{d-2k}}$. *Смешанной формой Ходжа–Римана* на компоненте A_k называется квадратичная форма

$$q(\alpha) = (-1)^k \alpha^2 \Omega(V).$$

Смешанное примитивное подпространство пространства A_k состоит из всех форм α, таких что $\alpha \Omega L_\Delta(V) = 0$.

Следующая теорема обобщает неравенство Александрова–Фенхеля и является аналогом соотношений Ходжа–Римана:

Теорема 6.4 *Смешанная форма Ходжа–Римана положительно определена на смешанном примитивном подпространстве.*

Теорема 6.3 получается отсюда в качестве формального следствия.

7 Элементарные перестройки (flips)

Пусть P — простой многогранник в $\mathbb{R}^d$. Тогда существует такой простой многогранник Δ в $\mathbb{R}^{d+1}$ и общая линейная функция l, что некоторое сечение многогранника Δ горизонтальной гиперплоскостью $l = const$ совпадает с P. Начнем поднимать эту гиперплоскость. Пока она не пересекает вершин многогранника Δ, мы получаем в сечении аналогичные многогранники. Пусть в некоторый момент гиперплоскость прошла через вершину (можно считать без ограничения общности, что никакие две вершины не лежат на одной и той же горизонтальной гиперплоскости, иначе достаточно слегка пошевелить линейную функцию l).

Определение. Мы говорим, что многогранник P подвергся *элементарной перестройке порядка* m, если пройденная вершина имела индекс m. Таким образом, d-мерные многогранники допускают $d+2$ типа элементарных перестроек.

Пример. Перестройка порядка 0 — это просто рождение симплекса, перестройка порядка $d+1$ — это уничтожение симплекса. Перестройка порядка 1 — это возникновение новой гиперплоской грани. При перестройке этого типа "отрезается вершина", то есть на месте вершины появляется гиперплоская симплициальная грань. Перестройка порядка d — это стягивание симплициальной гиперплоской грани в точку.

На рисунке 1 изображена перестройка порядка 1 трехмерного многогранника.

Пример. Трехмерные многогранники, кроме уже описанных перестроек порядков 0, 1, 3, 4, допускают единственную нетривиальную перестройку порядка 2. Эта перестройка изображена на рисунке 2.

Те грани (передняя и задняя), которые до перестройки пересекались, после перестройки уже не пересекаются. Наоборот, боковые грани до перестройки не пересекались, а при перестройке пересеклись. Заметим, что описанная перестройка сохраняет количество граней в каждой размерности, а значит, сохраняет и h-вектор.

Теорема 7.1 *Простой выпуклый многогранник можно непрерывно продеформировать в симплекс, допуская лишь конечное число элементарных перестроек.*

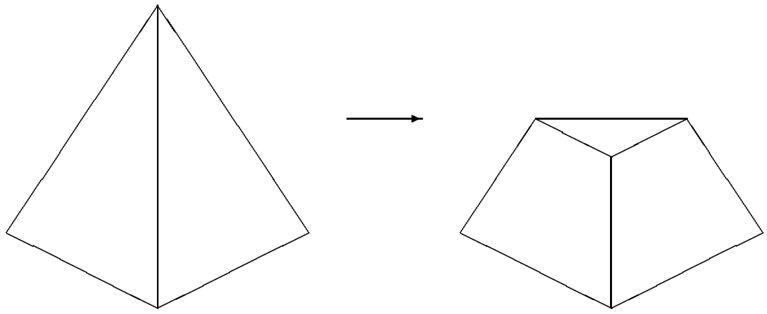

Рис. 1: Перестройка порядка 1 трехмерного многогранника

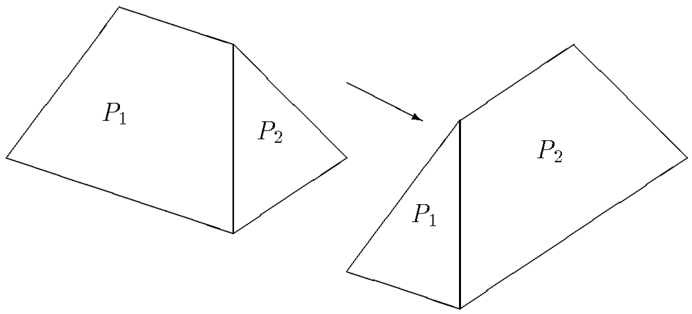

Рис. 2: Перестройка порядка 2 трехмерного многогранника

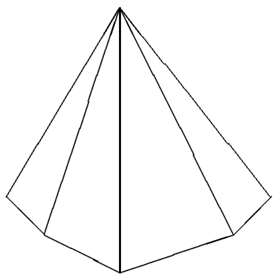

Рис. 3: Разрешение простого многогранника

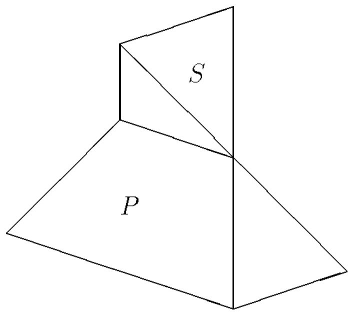

Рис. 4: Многогранник P и симплекс S.

Доказательство.
Действительно, пусть P — произвольный простой d-мерный многогранник. Поместим этот многогранник в пространство $\mathbb{R}^{d+1}$.

Можно представлять себе многогранник P лежащим в горизонтальной гиперплоскости. Возьмем точку v над этой гиперплоскостью и построим конус над многогранником P с вершиной точке v (см. рисунок 3). Теперь пошевелим гиперплоские грани построенного конуса. Возникнет простой многогранник Δ, нижняя гиперплоская грань которого получается малым шевелением P и, в частности, комбинаторно эквивалентна P. Многогранник Δ задает искомую деформацию. $\square$

Нетрудно описать изменение многочлена объема в ходе элементарной перестройки. Пусть многогранник Q получается из многогранника P при помощи элементарной перестройки порядка m. В элементарной перестройке участвуют гиперплоские грани $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{d+1}$ многогранника P (в переходный момент все эти грани пересекаются в одной точке). Эти грани высекают в плоскости многогранника P некоторый симплекс S (см. рис. 4). Обозначим через V_P, V_Q и V_S многочлены объема многогранников P, Q и S соответственно. Эти многочлены, как нетрудно проверить, связаны следующей формулой:

$$V_Q = V_P + (-1)^{d-m} V_S. \tag{1}$$

Задача. Объясните формальный смысл формулы (1) (строго говоря, все три многочлена, участвующие в этой формуле, определены на разных пространствах).

Задача. Докажите, что многочлен объема симплекса равен φ^d, где φ — некоторый аффинный функционал.

Формула (1) позволяет проследить за изменением многочлена объема в ходе элементарной перестройки. Тем самым можно проследить за изменением формы Ходжа–Римана. На этом и основано доказательство теоремы 6.4.