Выпуклые тела и выпуклые многогранники

Лекция 8

1 Задача о максимальном числе граней

Эта лекция посвящена решению следующей проблемы:

Проблема. Описать многогранники, реализующие максимум f-вектора при фиксированном числе вершин (или гиперплоских граней).

Прежде всего, можно существенным образом ограничить класс рассматриваемых многогранников:

Теорема 1.1 *Максимум f-вектора при фиксированном числе вершин достигается на некотором симплициальном многограннике. Максимум f-вектора при фиксированном числе гиперплоских граней достигается на некотором простом многограннике.*

Действительно, если в несимплициальном многограннике пошевелить все вершины общим образом, количество граней только увеличится (каждая несимплициальная грань разобьется на несколько симплициальных). Аналогично, если в непростом многограннике общим образом пошевелить все гиперплоские гарни, количество граней только увеличится (например, всякая непростая вершина распадется на несколько простых).

Задача. Дайте строгое доказательство теоремы 1.1.

Укажем естественную оценку сверху для числа k-мерных граней многогранника с n вершинами:

$$f_k \leqslant \binom{n}{k+1}. \tag{1}$$

Эта оценка очевидна для симплициальных многогранников (всякой k-мерной грани можно однозначно сопоставить $(k+1)$-элементное множество ее вершин). Для произвольных многогранников оценка вытекает из теоремы 1.1.

Имеет место аналогичная оценка для числа k-мерных граней d-мерного многогранника с n гиперплоскими гранями:

$$f_k \leqslant \binom{n}{d-k}. \tag{2}$$

Эта оценка очевидна для простых многогранников (всякой k-мерной грани соответствует $d-k$ гиперплоских граней, ее содержащих). Для произвольных многогранников оценка вытекает из теоремы 1.1.

В случае симплекса в обоих неравенствах (1) и (2) достигается равенство (в этом случае $n = d+1$). Спрашивается, может ли равенство в (1) и (2) достигаться при $n > d+1$? Например, бывают ли многогранники (отличные от симплекса), в которых любые две вершины соединены ребром? В трехмерном пространстве, очевидно, таких многогранников не бывает. Однако в четырехмерном пространстве бывают. Вообще, в d-мерном пространстве существуют многогранники, в которых всякий набор из $[d/2]$ вершин принадлежит некоторой грани размерности $[d/2]-1$. Такие многогранники называются *смежностными*.

Смежностные многогранники реализуют максимум числа k-мерных граней (при фиксированном числе вершин) в случае $k < [d/2]$. Однако, поскольку на f-вектор симплициального многогранника имеется $[d+1/2]+1$ линейных соотношений (соотношения Дена–Соммервиля), он полностью определяется значениями f_k при $k < [d/2]$. В частности, все симплициальные смежностные многогранники с одинаковым числом вершин имеют один и тот же f-вектор. Оказывается, что этот f-вектор и доставляет максимум среди всех f-векторов с фиксированным $f_0 = n$. Это утверждение было доказано Макмюлленом в 1970 году и известно под названием *теоремы о максимальном числе граней* (Upper bound theorem).

Теорема о максимальном числе граней для простых многогранников формулируется двойственным образом. Именно, назовем *дуально-смежностным* всякий многогранник, в котором любые $[d/2]+1$ гиперплоских граней пересекаются. Все простые дуально-смежностные многогранники имеют один и тот же f-вектор. Этот f-вектор и является максимальным среди всех f-векторов многогранников с фиксированным $f_{d-1} = n$.

В принципе, теорема о максимальном числе граней вытекает из условий Макмюллена. Действительно, условия Макмюллена описывают все реализуемые f-векторы простых (или, симплициальных) многогранников. Нужно только найти среди них максимум. Для этого, очевидно, достаточно найти максимум среди всех допустимых h-векторов, поскольку f-вектор зависит от h-вектора монотонно. Например, для простых многогранников, как мы видели,

$$f_i = \sum_{k \geqslant i} h_k \binom{k}{i}$$

(все коэффициенты положительные). Максимум h-вектора достигается в том случае, когда все неравенства вида $g_{k+1} \leqslant \partial_k(g_k)$ обращаются в равенство.

Задача. Проверьте, что такое вообще бывает, и что максимум реализуется именно в этом случае.

Максимальные допустимые значения элементов h_k таковы:

$$h_k^{max} = \binom{n-d+k-1}{k}, \quad k \leqslant [d/2].$$

Эти значения достигаются для дуально-смежностных простых многогранников (или смежностных симплициальных многогранников).

В четномерном пространстве всякий смежностный многогранник симплициален, а всякий дуально-смежностный прост. В нечетномерном пространстве это не так. Например, в $\mathbb{R}^3$ любой многогранник является смежностным и дуально-смежностным (поскольку всякая вершина принадлежит некоторой 0-мерной грани, а всякая двумерная грань непуста). Вообще, пирамида над четномерным смежностным (отличным от симплекса) многогранником является смежностным несимплициальным многогранником.

Ниже мы приведем геометрическое доказательство теоремы о максимальном числе граней, не использующее условия Макмюллена.

2 Циклические многогранники

Ниже мы рассмотрим важный пример смежностных многогранников — циклические многогранники. Циклические многогранники решают задачу о максимальном f-векторе при заданном числе вершин. Кроме того, они играют важную роль в доказательстве достаточности условий Макмюллена (теорема Биллера–Ли).

Определение. Пусть $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ — отображение Веронезе

$$t \mapsto (t, t^2, \ldots, t^d).$$

Рассморим произвольное конечное множество точек A на числовой прямой. *Циклическим многогранником*, порожденным множеством A, называется выпуклая оболочка множества $v(A)$. Если множество A состоит из n элементов, то говорят, что соответствующий циклический многогранник имеет тип $C(n,d)$.

Предложение 2.1 *Пусть множество A на числовой прямой содержит ровно $d+1$ точку. Тогда точки множества $v(A)$ аффинно независимы.*

Доказательство.
Гиперплоскости в пространстве $\mathbb{R}^d$ мы будем отождествлять с многочленами степени d. Именно, пусть гиперплоскость H задается уравнением

$$\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \cdots + \alpha_d x_d = 0.$$

Тогда ей соответствует многочлен

$$f_H(t) = \alpha(v(t)) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \cdots + \alpha_d t^d.$$

Заметим, что многочлен f_H не равен тождественно нулю. Точка $v(t)$ принадлежит гиперплоскости H тогда и только тогда, когда $f_H(t) = 0$.

Предположим теперь, что точки $v(t_1), v(t_2), \ldots, v(t_{d+1})$ аффинно зависимы. Но тогда они лежат в одной гиперплоскости H. Следовательно, многочлен f_H обращается в 0 в точках $t_1, \ldots, t_{d+1}$. Но если многочлен степени d обращается в 0 в $d+1$ точке, то этот многочлен тождественно равен нулю. Противоречие. $\square$

Из доказанного предложения вытекает 2 следствия.

Следствие 2.2 *Если множество A на числовой прямой содержит не более $d+1$ точки, то тогда точки множества $v(A)$ аффинно независимы.*

Следствие 2.3 *Циклический многогранник типа $C(d+1, d)$ — симплекс.*

Нам потребуется следующая очевидная лемма:

Лемма 2.4 *Многочлен $f(t) = \prod\limits_{a \in A}(t-a)$ принимает в точке t положительное (отрицательное) значение тогда и только тогда, когда справа от точки t лежит четное (нечетное) число точек из A.*

Приступим к изучению комбинаторных свойств циклических многогранников.

Предложение 2.5 *Все точки множества $v(A)$ являются вершинами циклического многогранника $\mathrm{conv}(v(A))$.*

Доказательство.
Предположим противное: некоторая точка $v(t_0)$, $t_0 \in A$ лежит в выпуклой оболочке остальных точек $v(t)$, $t \in A$. Тогда, по теореме Каратеодори, точка $v(t_0)$ лежит в некотором симплексе с вершинами $v(t_1), \ldots, v(t_{d+1})$, $t_1, \ldots, t_{d+1} \in A$. Это означает, что для каждого $1 \leqslant k \leqslant d+1$ многочлен

$$f(t) = \prod_{i \neq k}(t - t_i)$$

принимает значения одного знака в точках t_0 и t_k. Следовательно, четность числа корней этого многочлена справа от точки t_0 совпадает с четностью числа корней справа от точки t_k. Но справа от точки t_k ровно $d-k$ корней. Следовательно, k можно выбрать таким образом, чтобы число корней справа от точки t_0 не было сравнимо по модулю 2 с числом корней справа от точки t_k. Противоречие. $\square$

Теорема 2.6 *Всякий циклический многогранник является симплициальным.*

Доказательство.
В самом деле, ни одна гиперплоская грань не может содержать более d вершин. В противном случае мы найдем аффинно зависимую систему из $d+1$ точки на кривой Веронезе. Итак, всякая гиперплоская грань имеет ровно d вершин. Следовательно, всякая гиперплоская грань — симплекс. Но тогда и все грани (во всех размерностях) — симплексы. $\square$

Для дальнейшего нам понадобится следующее определение:

Определение. Пусть A — конечное множество на числовой прямой, $X \subseteq A$ — некоторое подмножество. *Компонента* множества X — это максимальная цепочка элементов множества X, идущих в друг за другом во множестве A.

Пример. Пусть $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $X = \{1,3,4,7,8\}$. Тогда множество X состоит из следующих компонент: $\{1\}$, $\{3,4\}$, $\{7,8\}$.

Определение. Компонента множества $X \subseteq A$ называется *собственной*, если она не содержит ни минимального элемента множества A, ни максимального элемента множества A. *Правой компонентой* называется компонента, содержащая максимальный элемент множества A. *Левой компонентой* называется компонента, содержащая минимальный элемент множества A.

Теорема 2.7 (Критерий четности Гейла) *Пусть A — конечное множество точек на числовой прямой, $X \subseteq A$ — d-элементное подмножество. Множество $v(X)$ является множеством вершин некоторой гиперплоской грани циклического многогранника $\operatorname{conv}(v(A))$ тогда и только тогда, когда все собственные компоненты множества X содержат четное число элементов.*

Доказательство.
Множество $\operatorname{conv}(v(X))$ является гиперплоской гранью тогда и только тогда, когда все остальные вершины лежат по одну сторону от гиперплоскости, натянутой на $v(X)$. Но в этом случае многочлен $f(t) = \prod_{x \in X}(t-x)$ принимает значения одного и того же знака во всех точках множества $A \setminus X$. Но тогда все собственные компоненты множества X должны содержать четное число элементов. То же рассуждение проходит и в обратную сторону. □

Лемма 2.8 *Пусть подмножество $X \subseteq A$ имеет m нечетных собственных компонент. Тогда множество $X \cup \{x\}$ имеет не менее $m-1$ нечетной собственной компоненты.*

Доказательство.
Если элемент x не примыкает ни к одной из нечетных компонент, то число нечетных компонент увеличится на единицу. Если элемент x примыкает к одной нечетной компоненте, то эта компонента станет четной, а все остальные компоненты останутся такими, как были. Если элемент x примыкает сразу к двум нечетным компонентам, то тогда эти компоненты сольются в одну нечетную компоненту. В любом случае число нечетных компонент уменьшается не более чем на 1. □

Из доказанной леммы непосредственно вытекает следующая

Теорема 2.9 *Пусть множество $X \subseteq A$ состоит из $k \leqslant d$ точек. Множество $v(X)$ совпадает с множеством вершин некоторой $(k-1)$-мерной грани циклического многогранника $\operatorname{conv}(v(A))$ тогда и только тогда, когда множество X содержит не более $(d-k)$ нечетных собственных компонент.*

Из этой теоремы вытекают 2 важных следствия:

Следствие 2.10 *Пусть $1 \leqslant k \leqslant [d/2]$. Тогда всякие k вершин циклического многогранника образуют грань размерности $k-1$. В частности,*

$$f_{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Следствие 2.11 *Любые два циклических многогранника типа $C(n,d)$ комбинаторно эквивалентны.*

Это позволяет говорить о многограннике $C(n,d)$, не уточняя конкретный выбор множества A.

Лемма 2.12 *Пусть множество A состоит из n элементов. Существует ровно*

$$\binom{n-k}{n-2k}$$

$2k$-элементных подмножеств $X \subseteq A$, все компоненты которых (не только собственные) четные.

Дело в том, что каждую четную компоненту можно заменить компонентой, содержащей вдвое меньше элементов. Из этого наблюдения и вытекает сформулированная лемма.

Предложение 2.13 *Число гиперплоских граней циклического многогранника $C(n,d)$ выражается формулой*

$$f_{d-1}(C(n,d)) = \mu(n,d) = \binom{n-[\frac{d+1}{2}]}{n-d} + \binom{n-[\frac{d+2}{2}]}{n-d}.$$

Доказательство.
Пусть сначала $d = 2k$ четно. Тогда, согласно критерию Гейла, гиперплоские грани представляются подмножествами $X \subseteq A$ следующих двух видов:

- Подмножество X состоит из одних только четных компонент. Количество таких подмножеств X мы уже посчитали.
- Все собственные компоненты множества X четны, а обе несобственные — нечетны. Тогда выкинем из множества X (и из множества A) минимальный и максимальный элементы множества X. Получим множество X', содержащее $2k-2$ элемента и состоящее только из четных компонент. Но количество таких подмножеств X' уже посчитано.

На каждый из описанных типов приходится по биномиальному коэффициенту.

Допустим теперь, что $d = 2k+1$ нечетно. Тогда все собственные компоненты множества X четны, а одна из несобственных (либо правая, либо левая) нечетна. Отсюда сумма биномиальных коэффициентов. □

Задача. Проведите доказательство во всех деталях.

При помощи аналогичных соображений можно посчитать и все остальные компоненты f-вектора циклического многогранника. Получится следующий ответ:

$$f_k = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{n}{n-j}\binom{n-j}{j}\binom{j}{k+1-j}, & d = 2m-1, \\ \sum\limits_{j=0}^{m} \frac{k+2}{n-j}\binom{n-j}{j+1}\binom{j+1}{k+1-j}, & d = 2m. \end{cases}$$

Задача. Проведите соответствующие вычисления.

3 Линк вершины

Определение. Пусть P — выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим произвольную вершину v многогранника P. Пусть H — гиперплоскость, отделяющая вершину v от всех остальных вершин многогранника P. Многогранник $P \cap H$ называется *линком вершины v многогранника P*. Линк вершины определен однозначно с точностью до комбинаторной эквивалентности.

Предложение 3.1 *Пусть $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1}$. Пусть P — циклический многогранник с вершинами в точках $v(t_0), v(t_1), \ldots, v(t_{n-1})$. Тогда линк вершины $v(t_0)$ комбинаторно эквивалентен циклическому многограннику типа $C(n-1, d-1)$.*

Доказательство.
Пусть Q — линк вершины $v(t_0)$ многогранника P. В качестве гиперплоскости H в данном случае можно взять гиперплоскость $x_0 = \varepsilon$. В этой гиперплоскости вершины линка Q будут иметь следующие координаты:

$$x_i(t_k) = t_0^i + \varepsilon \frac{t_k^i - t_0^i}{t_k - t_0}.$$

Можно считать, что $t_0 = 0$. Тогда выписанные уравнения для линка просто совпадают с уравнениями на вершины циклического многогранника. □

Предложение 3.2 *Если размерность d четна, то линки всех вершин циклического многогранника типа $C(n,d)$ комбинаторно эквивалентны циклическому многограннику типа $C(n-1, d-1)$.*

Доказательство.
Предположим, что рассматривается линк вершины $v(t_k)$. Опять можно считать, что $t_k = 0$. В качестве гиперплоскости H можно взять гиперплоскость $x_d = \varepsilon$. Поскольку d четно, гиперплоскость H отделяет вершину $v(0)$ от остальных вершин многогранника P. Линк имеет вершины с координатами

$$x_i(t_j) = \frac{1}{t_j^{d-j}}$$

(относительно некоторой системы координат в гиперплоскости H). Но эти вершины тоже лежат на кривой Веронезе. Поэтому получается опять циклический многогранник. $\square$

Лемма 3.3 *Пусть линк каждой вершины многогранника типа $C(n,d)$ комбинаторно эквивалентен циклическому многограннику типа $C(n-1,d-1)$. Тогда*

$$n\mu(n-1,d-1) = d\mu(n,d).$$

Доказательство.
Для доказательства посчитаем число гиперплоских граней многогранника P типа $C(n,d)$ следующим способом. Посчитаем число всех гиперплоских граней, инцидентных данной вершине. Их ровно $\mu(n-1,d-1)$. Теперь нужно это число умножить на число вершин. Таким образом мы посчитаем все гиперплоские грани, причем каждую грань мы посчитаем ровно d раз, ибо каждая гиперплоская грань инцидентна ровно d вершинам. $\square$

Следствие 3.4 *Если d нечетно и $n \geqslant d+2$, то не все линки вершин многогранника $C(n,d)$ комбинаторно эквивалентны многограннику $C(n-1,d-1)$.*

4 Смежностные многогранники

Определение. Пусть многогранник P содержит более k вершин. Многогранник P называется *k-смежностным*, если всякое $(k+1)$-элементное множество вершин многогранника P совпадает с множеством вершин некоторой собственной грани многогранника P.

Очевидно, всякий многогранник является 1-смежностным. В трехмерном пространстве 2-смежностными многогранниками являются только симплексы. Но уже в четырехмерном пространстве существует нетривиальный (то есть не являющийся симплексом) 2-смежностный многогранник.

Лемма 4.1 *Если многогранник в $\mathbb{R}^d$ является k-смежностным, то $k \leqslant d$.*

Доказательство.
Действительно, предположим противное: $k > d$. Предположим, что многогранник P имеет полную размерность (не лежит ни в каком нетривиальном аффинном подпространстве). Иначе рассмотрим многогранник P внутри его выпуклой оболочки. Если многогранник P имеет размерность d, то тогда можно выбрать $k > d$ аффинно независимых вершин. Но в силу условия k-смежности, эти вершины должны принадлежать некоторой собственной грани. Противоречие. $\square$

Предложение 4.2 *Циклический многогранник $C(n,d)$ всегда является k-смежностным при $k \leqslant [d/2]$.*

Это вытекает непосредственно из следствия 2.10.

Отметим следующие простые свойства k-смежностных многогранников:

Предложение 4.3 *Справедливы следующие утверждения:*

- *Если многогранник P является k-смежностным, то он является также j-смежностным при $0 < j < k$.*
- *Пусть многогранник P является k-смежностным. Тогда выпуклая оболочка всякого подмножества вершин многогранника P, содержащего более k вершин, тоже является k-смежностным многогранником.*

Следующая теорема вводит ограничение на k, при котором существуют нетривиальные k-смежностные многогранники.

Теорема 4.4 *Пусть многогранник P является k-смежностным. Тогда, если $k > [d/2]$, то многогранник P является симплексом.*

Доказательство.
Действительно, предположим, что многогранник P не является симплексом. Тогда он содержит не менее чем $d+2$ вершин. Пусть X — множество из $d+2$ аффинно независимых вершин многогранника P. По теореме Радона, множество X можно разбить на два подмножества Y и Z таким образом, что выпуклые оболочки этих подмножеств будут пересекаться. Следовательно, ни одно из подмножеств $\operatorname{conv} Y$ и $\operatorname{conv} Z$ не является гранью многогранника P. Однако $\#(Y)+\#(Z) = d+2$. Следовательно, $\#(Y) \leqslant d/2+1 \leqslant k$ или $\#(Z) \leqslant d/2+1 \leqslant k$. Таким образом, по условию k-смежности, одно из множеств $\operatorname{conv} X$ или $\operatorname{conv} Y$ должно быть собственной гранью многогранника P. Противоречие. □

Следствие 4.5 *Пусть многогранник P является k-смежностным. Тогда всякая грань F размерности $0 \leqslant \dim F \leqslant 2k-1$ является симплексом.*

Определение. *Смежностный* многогранник — это $[d/2]$-смежностный многогранник.

Следствие 4.6 *Пусть d четно. Тогда всякий смежностный многогранник в $\mathbb{R}^d$ является симплициальным.*

Заметим, что если $d \geqslant 3$ нечетно, то в $\mathbb{R}^d$ существует смежностный многогранник, не являющийся симплициальным. Например, пирамида над смежностным многогранником размерности $d-1$.

Предложение 4.7 *Пусть P — k-смежностный многогранник. Тогда линк любой его вершины является $(k-1)$-смежностным.*

Доказательство.
Рассмотрим $k-1$ вершину линка Q вершины v многогранника P. Вершины многогранника Q соответствуют ребрам многогранника P, сходящимся в вершине v. Рассмотрим концы этих ребер, отличные от v. Вместе с вершиной v они составляют некоторое k-элементное множество вершин многогранника P. Но в силу k-смежности, эти вершины определяют собственную грань многогранника P. А значит, соответствующие вершины многогранника Q определяют собственную грань многогранника Q. □

5 Теорема о максимальном числе граней

Теперь мы готовы доказать теорему о максимальном числе граней:

Теорема 5.1 *Максимум f-вектора выпуклого многогранника с фиксированным f_0 достигается на всяком смежностном симплициальном многограннике (в частности, на циклическом многограннике). Максимум f-вектора выпуклого многогранника с фиксированным f_{d-1} достигается на всяком простом дуально-смежностном многограннике (в частности, на многограннике, двойственном к циклическому).*

Достаточно доказать вторую часть этой теоремы (относящуюся к простым многогранникам). Первая часть получится из соображений двойственности.

Лемма 5.2 *Если Γ — гиперплоская грань простого многогранника P, то $h_k(\Gamma) \leqslant h_k(P)$.*

Доказательство.
Рассмотрим общую линейную функцию l на многограннике P, значение которой на всех вершинах грани Γ меньше, чем на остальных вершинах многогранника. Ограничение функции l на грань Γ является общей линейной функцией на этой грани, поэтому можно говорить об индексе вершины относительно Γ. Все вершины индекса k относительно грани Γ имеют тот же индекс относительно всего многогранника P (поскольку дополнительное ребро всегда смотрит в сторону возрастания функции l). Отсюда неравенство $h_k(\Gamma) \leqslant h_k(P)$. □

Лемма 5.3 *Если P — дуально-смежностный простой многогранник, то для всякой гиперплоской грани Γ и числа $k+1 \leqslant [d/2]$ имеет место равенство $h_k(\Gamma) = h_k(P)$.*

Доказательство.
Пусть l — та же линейная функция на многограннике P, что и в доказательстве леммы 5.2. Мы хотим доказать, что всякая вершина индекса k принадлежит грани Γ. Предположим противное: нашлась некоторая вершина v индекса k, не принадлежащая Γ. Рассмотрим верхнюю сепаратрису F вершины v. Грань F имеет размерность $d-k$, и, следовательно, получается в пересечении k гиперплоскостей $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$. Очевидно, $F \cap \Gamma = \varnothing$, то есть $\Gamma_1 \cap \cdots \cap \Gamma_k \cap \Gamma = \varnothing$. Однако в дуально-смежностном многограннике пересечение $k+1 \leqslant [d/2]$ гиперплоской грани всегда непусто. Противоречие. □

Лемма 5.4 *Для всякого простого d-мерного многогранника P с n гиперплоскими гранями имеет место неравенство*

$$h_{k+1}(P) \leqslant \frac{n-d+k}{k+1} h_k(P).$$

Доказательство.
Назовем *k-инцидентностью* многогранника P пару (Γ, x), состоящую из гиперплоской грани Γ и ее вершины x, имеющей индекс k относительно Γ. Посчитаем число k-инцидентностей I_k двумя способами. С одной стороны, очевидно,

$$I_k = \sum_{\Gamma} h_k(\Gamma),$$

где суммирование ведется по всем гиперплоским граням многогранника P. В силу леммы 5.2 отсюда следует, что $I_k \leqslant n h_k(P)$.

С другой стороны, вершина x может участвовать в k-инцидентности только если ее индекс равен k или $k+1$. Если вершина x имеет индекс k, то ей соответствуют k-инцидентности вида (Γ, x), где гиперплоская грань Γ содержит нижнюю сепаратрису вершины x. Таких граней ровно $d-k$. Если же индекс вершины x равен $k+1$, то эта вершина участвует в k-инцидентностях вида (Γ, x), где гиперплоская грань Γ содержит верхнюю сепаратрису точки x (это эквивалентно тому, что Γ не содержит нижнюю сепаратрису). Таких гиперплоских граней ровно $k+1$. Таким образом,

$$I_k = (d-k)h_k(P) + (k+1)h_{k+1}(P).$$

Комбинируя это равенство с неравенством $I_k \leqslant n h_k(P)$, получаем утверждение леммы. □

Следствие 5.5 *Для всякого простого d-мерного многогранника P с n гиперплоскими гранями*

$$h_k(P) \leqslant \binom{n-d+k-1}{k}.$$

Следствие 5.6 *Для дуально-смежностного простого d-мерного многогранника P при $k \leqslant [d/2]$ имеет место равенство*

$$h_k(P) = \binom{n-d+k-1}{k}.$$

Это вытекает из леммы 5.3 и из доказательства леммы 5.4 (все неравенства в этой лемме заменяются равенствами).

Следствия 5.5 и 5.6 (вместе с соотношениями Дена–Соммервиля) доказывают теорему о максимальном числе граней.