# Гауссова кривизна.

**Задача 1.** Найдите гауссову кривизну графика многослена $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ в начале координат.

**Задача 2.** Найдите гауссову кривизну параболоида вращения, заданного уравнением $z = -(x^2 + y^2)/2$.

**Задача 3.** Найдите гауссову кривизну гиперболического параболоида, заданного уравнением $z = (x^2 - y^2)/2$. Сравните ответ с ответом к предыдущей задаче.

**Задача 4.** "Теорема Эгрегиум" Гаусса предлагает следующий метод нахождения гауссовой кривизны, использующий только внутренние свойства поверхности. Нарисуем на поверхности окружность радиуса $r$ с центром в исследуемой точке. (Как определить окружность на поверхности?) Найдем длину $c(r)$ этой окружности. Тогда

$$\lim_{r\to 0}\{\left(\frac{c}{2\pi r}\right)''\} = -\frac{1}{3}K.$$

Проверьте справедливость этой теоремы (a) для сферы; (b) для параболоида вращения в начале координат.

**Задача 5.** Рассмотрим поверхность, полученную вращением плоской кривой $(x(s), y(s))$, где $s$ — натуральный параметр, вокруг оси $Ox$. Докажите, что $K = -\frac{1}{y}\frac{d^2y}{ds^2}$.

**Задача 6.** *Трактрисой* называется такая кривая, проходящая через точку (0,1), что касательная в точке $(x,y)$ пересекает ось $Ox$ на единичном расстоянии от точки касания. Поверхность, полученная вращением трактрисы вокруг оси $Ox$, называется *псевдосферой.*

Используя предыдущую задачу докажите, что кривизна псевдосферы равна -1.

**Задача 7.** Кривизна поверхности вращения кривой $(x(s), (y(s))$ постоянна и равна 0, -1 или 1. Найдите функцию $y(s)$. Нарисуйте примеры кривых $(x(s), y(s))$.

Покажите, что при $K = -1$ хотя бы на одном конце кривой есть особенность — касательная вертикальна. Отсюда следует, что поверхность вращения постоянной отрицательной кривизны имеет естественную границу, за которую ее нельзя продолжить гладким образом.

**Задача 8.** Покажите, что псевдосфера локально однородна (это значит, что любую точку псевдосферы можно перевести в любую с помощью отображения, сохраняющего расстояния между точками псевдосферы). (Указание: используйте параметризацию $(s, \theta)$, где $s$ натуральный параметр на трактрисе, а $\theta$ — угол поворота вокруг оси $Ox$. Докажите, что для любых $a$ и $\theta_0$ отображение $(s, \theta) \mapsto (s + a, \theta_0 + e^a\theta)$ является изометрией.)

**Задача 9.** (Любителям формулы Тэйлора.) Пусть $S$ — гладкая поверхность вращения, пересекающая ось вращения в точке $p$. Покажите, что теорема Эгрегиум выполнена в точке $p$.