# Семинар

Как известно, связность Леви-Чивита определяется двумя условиями:
1) $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$,
2) $X < Y, Z > = < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >$
для любых $X, Y, Z \in Vect M$.
Комбинируя эти две формулы, докажите, что
$< \nabla_X Y, Z > =$
$= \frac{1}{2}\{X, < Y, Z > + Y < Z, X > - Z < X, Y > - < Z, [Y, X] > - < [Y, Z], X > - < Y, [X, Z] >\}$.
Это и есть доказательство существования и единственности римановой связности.

## Группы Ли за один четверг

*Группа Ли* $G$ — это гладкое $n$-мерное многообразие с таким умножением, заданным на множестве его точек, что $(x, y) \to xy^{-1}$ — гладкое отображение $G \times G \to G$.

Для каждого элемента $g \in G$ отображения $L_g, R_g : G \to G$, заданные формулами
$L_g(g') = g \cdot g'$, $R_g(g') = g' \cdot g$, являются диффеоморфизмами $G$ и называются *левым и правым сдвигом* соответственно. Отметим, что $L_g \circ R_g = R_g \circ L_g$.

Векторное поле $X$ на $G$ называется *левоинвариантным*, если $X_{g \cdot h} = (L_g)_* X_h$.

Касательное пространство $T_e G$ к группе $G$ в единичном элементе называется *касательной алгеброй* $Lie\ G$.

**Задача 1.** Докажите, что любое левоинвариантное поле $X$ имеет вид $X_g = (L_g)_* \zeta$, где $\zeta \in T_e G$.

**Задача 2.** Докажите, что скобка Ли $[X, Y]$ двух левоинвариантных полей $X$ и $Y$ есть снова левоинвариантное поле.

**Задача 3.** Докажите, что

(а) любое левоинвариантное поле является полным, т.е. его интегральные кривые определены для всех $t \in I\!R$;

(б) его интегральная кривая $\gamma$, проходящая через $e \in G$, является однопараметрической подгруппой, т.е. гомоморфизмом $\gamma : I\!R \to G$. Ее стандартное обозначение $exp(t\zeta)$, где $\zeta = X_e$;

(в) любая другая его интегральная кривая есть левый сдвиг $\gamma$.

**Задача 4.** Опишите касательную алгебру группы $SL_2(I\!R)$. Приведите пример левоинвариантного, но не правоинвариантного векторного поля на этой группе.

**Задача 5.** Вычислите скобку Ли в касательной алгебре $Lie\ SL_2(I\!R)$.

**Замечание.** Про группы Ли можно прочитать в бесчисленных книгах. Например, в хорошей книге А. А. Кириллова "Элементы теории представлений", Наука, 1972 г. (первое издание).

Метрика на группе Ли называется лево (право-)инвариантной, если она инвариантна относительно левых (правых) сдвигов на группе. Риманова метрика одновременно лево- и правоинвариантная называется биинвариантной.

Внутренний автоморфизм $L_g \circ R_{g^{-1}} : g' \to gg'g^{-1}$ на группе сохраняет единицу, а потому индуцирует (невырожденное!) линейное преобразование касательной алгебры. Его называют $Ad\ g$.

**Задача 6.** Как построить левоинвариантную метрику на группе?

**Задача 7.** Если метрика на группе биинвариантна, то $Ad\ g$ — ортогональное преобразование касательной алгебры. Наоборот, $Ad\ G$ -инвариантное скалярное произведение в касательной алгебре рождает биинвариантную метрику на группе.

**Задача 8.** В задаче 7 условие ортогональности операторов $Ad\ G$ можно заменить условием кососимметричности операторов $ad\ x : y \to [x, y]$, $x$ и $y \in T_eG$. (Указание: $Ad\ exp(t\zeta) = e^{tad\zeta}$). Короче, биинвариантность метрики означает, что $< [x, y], z > + < y, [x, z] >= 0$.

**Задача 9.** Докажите, что любая
(а) компактная
(б) коммутативная группа Ли
имеет биинвариантную риманову метрику.

**Задача 10.** Пусть $G$ — группа Ли с левоинвариантной метрикой. Разберемся с римановой связностью $\nabla$:

а) Если $X$ и $Y$ — левоинвариантные векторные поля, то $\nabla_X Y$ — левоинвариантное векторное поле.

б) Из а) следует, что $\nabla_X$ — левоинвариантное преобразование касательной алгебры. Докажите, что $\nabla_X$ — кососимметрическое преобразование.

в) Докажите, что $< \nabla_X Y, Z >= \frac{1}{2}(< [X, Y], Z > - < [Y, Z], X > + < [Z, X], Y >)$ для любой тройки левоинвариантных векторных полей на $G$.

г) Докажите, что если метрика биинвариантна, то $\nabla_X = \frac{1}{2} ad\ X$.

д) Всегда ли однопараметрические подгруппы являются геодезическими на группе $G$?

е) Введите какую-нибудь левоинвариантную метрику на группе Ли унитреугольных $3 \times 3$ матриц $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и попробуйте найти все геодезические относительно римановой связности.