Упражнения по гомологической алгебре к 8 октября

1. Пусть X — симплициальное множество с реализацией $|X|$. Пусть $X_{(n)} \subset X_n$ — подмножество невырожденных n-симплексов. Докажите, что $|X|$ есть несвязное объединение $\bigsqcup_n X_{(n)} \times \Delta_n^0$ открытых симплексов.

2. Будем называть строго возрастающее вложение $[n-1] \to [n]$, не принимающее значения $i \in [n]$, "i-ой гранью" ∂_n^i. Будем называть неубывающее наложение $[n+1] \to [n]$, дважды принимающее значение $i \in [n]$, "i-ым вырождением" σ_n^i. Докажите, что

а) Любое строго возрастающее вложение можно представить в виде композиции отображения граней. Любое неубывающее наложение можно представить в виде композиции вырождений. Любое неубывающее отображение можно представить в виде композиции граней и вырождений;

б) Между гранями и вырождениями имеют место следующие соотношения:

$$\partial_{n+1}^j \partial_n^i = \partial_{n+1}^i \partial_n^{j-1} \text{ при } i < j; \quad \sigma_n^j \sigma_{n+1}^i = \sigma_n^i \sigma_{n+1}^{j+1} \text{ при } i \leq j;$$

$$\sigma_{n-1}^j \partial_n^i = \begin{cases} \partial_{n-1}^i \sigma_{n-2}^{j-1} \text{ при } i < j; \\ \mathrm{id}_{[n-1]} \text{ при } i = j \text{ или } i = j+1; \\ \partial_{n-1}^{i-1} \sigma_{n-2}^j \text{ при } i > j+1. \end{cases}$$

в) Все остальные соотношения между гранями и вырождениями следуют из б);

г) Строго возрастающее отображение $f: [m] \to [n]$ записывается в виде $f = \partial_n^{i_1} \ldots \partial_m^{i_s}$ ровно $(n-m)!$ способами.

3. Постройте триангуляцию произведения симплексов $\Delta_p \times \Delta_q$. *Подсказка*: определим симплициальное множество $\Delta[p] = (\Delta[p]_n)$, где $\Delta[p]_n$ есть множество неубывающих отображений $g: [n] \to [p]$, а для неубывающего $\phi: [m] \to [n]$ по определению $\Delta[p](\phi)(g) := g \circ \phi$. Докажите, что реализация $|\Delta[p]|$ гомеоморфна симплексу Δ_p. Далее, пусть $(\Delta[p] \times \Delta[q])^{diag}$ — диагональ бисимплициального множества $\Delta[p] \times \Delta[q]$ (см. следующую задачу). Тогда реализация $|(\Delta[p] \times \Delta[q])^{diag}|$ гомеоморфна $\Delta_p \times \Delta_q$.

4*. Пусть $X = (X_{mn})$ — бисимплициальное множество, т.е. функтор из $\Delta^0 \times \Delta^0$ в $Sets$. Беря ограничение на диагональ $\Delta^0 \subset \Delta^0 \times \Delta^0$, получаем симплициальное множество $X^{diag} = (X_{nn})$. Беря реализацию по второму аргументу, получаем симплициальное пространство $|X|^{(2)} = (|X_{n\bullet}|)$ с реализацией $\left||X|^{(2)}\right|$. Проводя реализации в обратном порядке, получаем $\left||X|^{(1)}\right|$. Докажите, что $|X^{diag}|$, $\left||X|^{(2)}\right|$ и $\left||X|^{(1)}\right|$ канонически гомеоморфны (теорема Эйленберга-Зильбера).

5. Пусть $(U_\alpha), \alpha \in A,$ — покрытие топологического пространства Y открытыми подмножествами. Пусть $U = \bigsqcup_A U_\alpha$ с очевидной проекцией на Y. Рассмотрим симплициальное пространство $X = (X_n),\ X_n = U^{[n]}$ (расслоенное произведение над Y) с очевидными отображениями. Докажите, что

а) Реализация $|X|$ гомотопически эквивалентна Y;

б) Если все пересечения открытых множеств покрытия стягиваемы, то реализация его нерва гомотопически эквивалентна Y.