Упражнения по гомологической алгебре к 6 декабря

1. Докажите, что кольцо когомологий $H^\bullet(\mathbf{BSO}(2n), \mathbf{R})$ изоморфно кольцу многочленов $\mathbf{R}[p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, \chi]$, где $p_k \in H^{4k}(\mathbf{BSO}(2n), \mathbf{R})$, $\chi \in H^{2n}(\mathbf{BSO}(2n), \mathbf{R})$.

2. Докажите, что кольцо $H^\bullet(\mathbf{BSO}(2n+1), \mathbf{R})$ изоморфно кольцу многочленов $\mathbf{R}[p_1, p_2, \ldots, p_n]$, где $p_k \in H^{4k}(\mathbf{BSO}(2n+1), \mathbf{R})$.

3. Докажите, что образующие в предыдущих задачах можно выбрать так, что при естественном отображении $\mathbf{BSO}(2n) \to \mathbf{BSO}(2n+1)$ в когомологиях $p_k \mapsto p_k,\ 1 \le k \le n-1,\ p_n \mapsto \chi^2$, а при естественном отображении $\mathbf{BSO}(2n+1) \to \mathbf{BSO}(2n+2)$ в когомологиях $p_k \mapsto p_k,\ 1 \le k \le n,\ \chi \mapsto 0$.

4. Образующие p_k называются *классами Понтрягина.* Значит, для всякого ориентированного вещественного расслоения E над X определены характеристические классы Понтрягина $p_k(E) \in H^{4k}(X, \mathbf{R})$. Положим $p_0(E) = 1$. Докажите, что $p_k(E \oplus F) = \sum_{i+j=k} p_i(E)p_j(F)$.

5. Пусть E — вещественное ориентированное расслоение над X, а $E_\mathbf{C} = E \otimes \mathbf{C}$ — его комплексификация. Докажите, что $p_k(E) = c_{2k}(E_\mathbf{C})$, а $c_{2k+1}(E_\mathbf{C}) = 0$. Докажите, что для произвольного комплесного расслоения F классы Чженя комплексно сопряженного расслоения $\bar{F}$ равны $c_k(\bar{F}) = (-1)^k c_k(F)$.

6. Образующая χ из задачи 1 называется *классом Эйлера.* Значит, для всякого $2n$-мерного ориентированного вещественного расслоения E над X определен класс Эйлера $\chi(E) \in H^{2n}(X, \mathbf{R})$. Пусть X — $2n$-мерное ориентированное многообразие, и $E = TX$ — касательное расслоение. Тогда $\chi(TX)$, примененный к фундаментальному циклу X, дает число $\chi(X)$. Докажите, что

а) $\chi(X) = 0$ тогда и только тогда, когда на многообразии X существует векторное поле, нигде не обращающееся в нуль;

б) $\chi(X)$ равно эйлеровой характеристике X.

7. Вычислите полный класс Чженя касательного расслоения $T\mathbf{C}P^n$.

8. Пусть E — комплексное векторное расслоение над X со связностью θ с кривизной Ξ. Для многочлена f выражение $\mathrm{Tr}(f(\Xi))$ является дифференциальной формой на X. Пусть θ_t — гладкое семейство связностей в E. Докажите, что $\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(f(\Xi_t)) = d\mathrm{Tr}\big(\frac{d\theta_t}{dt} f'(\Xi_t)\big)$.